Quito, Julio 2016

1. Módulos

En lo que sigue A será un anillo, es decir un conjunto dotado de dos operaciones internas, $+$ y $\cdot$ que verifican las propiedades a continuación:

- La operación $+$ hace de A un grupo abeliano : es conmutativa, asociativa, posee un elemento neutro denotado por 0, y cada elemento a posee un opuesto, $-a$;
- La operación $\cdot$ es asociativa, y posee un elemento neutro, denotado 1
- Las operación $\cdot$ se distribuye a ambos lados sobre $+$.

Si $\cdot$ es conmutativa, diremos que A es un anillo conmutativo. Si, por otro lado, todo elemento no nulo de A posee un inverso multiplicativo, se dice que A es un cuerpo. Existe una gran variedad de anillos, los ejemplos más útiles en estas notas serán $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, los enteros, los racionales y los reales. Los dos últimos son cuerpos. Por otro lado $\mathbb{R}[x]$ es el anillo de polinomios en x, y $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ es el anillo de matrices $n \times n$ con coeficientes reales.

La noción de módulo sobre un anillo generaliza a la vez la idea de espacio vectorial y la de grupo abeliano.

1.1. **Definición.** Sea A un anillo. Un $A-$*módulo a la izquierda* $_AM$ es el dato de un grupo abeliano M, dotado de una multiplicación por los elementos del anillo A. La multiplicación externa es distributiva sobres la sumas de M y de A, y verifica además :

i. Para $a, b \in A$ y $m \in M$ se tiene $a(bm) = (ab)m$;
ii. para todo $m \in M$ se tiene $1 \cdot m = m$.

De manera análoga se define la noción de $A-$módulo a la izquierda, y se escribe M_A. Naturalmente, si A es conmutativo, las dos nociones son equivalentes.

1.2. **Ejemplos.**

(a) Un anillo A es siempre un módulo sobre sí mismo, o sobre todo sub-anillo.
(b) Un grupo abeliano G es un $\mathbb{Z}-$módulo, de manera natural : para $n \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$ se define $n \cdot g$ de la manera natural.
(c) Si A es un cuerpo (por ejemplo $\mathbb{R}$), entonces un $A-$modulo no es otra cosa que un $A-$espacio vectorial.
(d) Sean $M = \mathbb{R}^n$ y X una matriz. Podemos entonces considerar las matrices X^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Del mismo modo, si $p \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio, podemos hablar del operador lineal $p(X)$. Esto permite dotar a M de una estructura de $\mathbb{R}[x]-$módulo como se indica a continuación. Dado $p \in \mathbb{R}[x]$ y $\mathbf{m} \in M$ definimos $p \cdot \mathbf{m} := p(X)\mathbf{m}$. Lógicamente, esta estructura depende esencialmente de X : dos elecciones distintas de X llevarán a dos estructuras diferentes de módulo.

1.3. **Definición.** Sea M un $A-$módulo. Un conjunto $X \subseteq M$ es *libre* o *linealmente independiente* si para cada subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ la igualdad $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, con $a_i \in A$ implica que $a_i = 0$ para todo i. Una *base* de un módulo es una parte generadora y linealmente independiente.

1.4. **Ejemplo.** En el $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z}_n$ no existe ningún conjunto linealmente independiente. En efecto, para todo $x \in \mathbb{Z}_n$ se tiene $nx = 0$.

Del mismo modo que en álgebra lineal se estudian las funciones lineales entre espacios vectoriales, o en el estudio de grupos se estudian los homomorfismos de grupos, se tiene una noción correspondiente para el contexto de $A-$módulos.

1.5. **Definición.**

(a) Un *morfismo de A-módulos* de M hacia N es un homomorfismo de grupos abelianos que además es $A-$lineal, es decir $f : M \to N$ tal que :
  i. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ para todos $m_1, m_2 \in M$;
  ii. $f(am) = af(m)$ para todos $a \in A$ y $m \in M$.
(b) Denotamos mediante $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ al conjunto $\{f : M \to N | f \text{ es morfismo de } A - \text{módulos}\}$.
(c) Dados $f \in \mathsf{Hom}_A(M, N)$ y $g \in \mathsf{Hom}_A(N, L)$, su *composición* es $g \circ f$ o simplemente gf. Se verifica inmediatamente que $gf \in \mathsf{Hom}_A(M, L)$. En particular, si $N = M$, entonces $\mathsf{End}_A(M) := \mathsf{Hom}_A(M, M)$ es un anillo para la composición. Se verifica que M es un $\mathsf{End}_A(M)-$módulo a la izquierda para $f \cdot m = f(m)$.
(d) Un morfismo $f \in \mathsf{Hom}_A(M, N)$ es un *isomorfismo* si es que existe $f' \in \mathsf{Hom}_A(N, M)$ tal que $ff' = \mathbb{1}_N$ y $f'f = \mathbb{1}_M$.

1.6. **Ejemplo.** Sean $M = \mathbb{R}^n$ y X_1, X_2 dos matrices, lo que confiere al espacio vectorial M dos estructuras de $\mathbb{R}[x]-$módulo, digamos M_2 y M_2. Si las matrices X_1 y X_2 son semejantes, es decir si existe una matriz inversible P tal que $PX_1 = X_2P$, entonces $M_1 \simeq M_2$. En efecto, definamos $\varphi : M_1 \to M_2$ mediante $\mathbf{m} \mapsto P\mathbf{m}$. Para $x^s \in \mathbb{R}[x]$ y $\mathbf{m} \in M$ tenemos entonces :

$$\varphi(x^s \cdot \mathbf{m}) = \varphi(X_1^s\mathbf{m}) = PX_1^s\mathbf{m} = X_2^sP\mathbf{m} = X_2^s\varphi(\mathbf{m}) = x^t \cdot \varphi(\mathbf{m})$$

donde la última igualdad está dada por la estructura en M_2. Este ejemplo muestra que la clasificación de matrices por semejanza es equivalente al estudio de los módulos sobre el anillo $\mathbb{R}[x]$. Este fenómeno es frecuente, y es la base de la teoría de representaciones.

1.7. **Observación.** Es inmediato demostrar que a su vez, $\mathsf{Hom}_A\,(M,\,N)$ es un $A-$módulo con la estructura inducida por la estructura de ${}_AN$. Por otro lado, si $f : M \to N$ es un morfismo, y ${}_AX$ un módulo, entonces tenemos dos aplicaciones :

- $\mathsf{Hom}_A\,(X,\,f) : \mathsf{Hom}_A\,(X,\,M) \to \mathsf{Hom}_A\,(X,\,N)$ definido por $\varphi \mapsto f\varphi$
- $\mathsf{Hom}_A\,(f,\,X) : \mathsf{Hom}_A\,(N,\,X) \to \mathsf{Hom}_A\,(M,\,X)$ definido por $\psi \mapsto \psi f$

Decimos que la primera se obtiene de $f : M \to N$ aplicando el *funtor* $\mathsf{Hom}_A\,(X,\,-)$, y la segunda se obtiene mediante el funtor $\mathsf{Hom}_A\,(-,\,X)$. El primero es *covariante*, y el segundo *contravariante*, ya que invierte los sentidos de los morfismos. Las correspondencias anotadas son *naturales*, en el sentido que se preserva la composición.

1.8. **Definición.** Sea ${}_AM$ un $A-$módulo.

(a) Un subconjunto $N \subseteq M$ es un *sub-módulo* de M si N es un módulo con las mismas operaciones que M. En este caso escribimos $N \leqslant M$.

(b) Si $N \leqslant M$ se define en el conjunto M la *congruencia módulo* N mediante $m_1 \sim m_2$ si y solo si $m_1 - m_2 \in N$. Se trata de una relación de equivalencia. Dado $m \in M$, su clase de equivalencia es

$$\tilde{m} = \{m' | m \sim m'\} = \{m + n | n \in N\} := m + N$$

El conjunto cociente es el conjunto de clases de equivalencia, denotado por M/N. Con las operaciones inducidas, se trata de un $A-$módulo :

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) := (m_1 + m_2) + N; \qquad\qquad a(m + N) := (am) + N.$$

En este caso, la aplicación $p : M \to M/N$ definida por $p(m) = m + N$ es un morfismo de $A-$módulos, llamada la *proyección natural.*

1.9. **Ejemplos.**

(a) Sea $A = M = \mathbb{Z}$, y $N = p\mathbb{Z}$, siendo p un entero cualquiera. El cociente M/N es $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_p$, los enteros módulo p.

(b) Sea $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{R}$ y $N = 2\pi\mathbb{Z}$. Entonces el cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ se identifica de manera natural con el círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

1.10. **Definición.** Sea $f : M \to N$ un morfismo de $A-$módulos.

(a) Un *núcleo* de f es un par (K, g) donde K es un $A-$módulo y $g : K \to M$ un morfismo que verifica :

i. $fg = 0$,
ii. Si $g' : K' \to M$ es tal que $fg' = 0$ entonces existe un único $j : K' \to K$ tal que $gj = j'$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K' \arrow[u, dotted, "\exists! j"] \arrow[ur, "g'"'] & & \end{tikzcd}$$

(b) Un *co-núcleo* de f es un par (Q, h) donde Q es un $A-$módulo y $h : N \to Q$ un morfismo que verifica :

i. $hf = 0$,
ii. Si $h' : N \to Q'$ es tal que $h'f = 0$ entonces existe un único $k : Q \to Q'$ tal que $kh = h'$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & Q \arrow[d, dotted, "\exists! k"] \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

1.11. **Observaciones.**

(a) En cada diagrama de la definición precedente se tiene una igualdad de composiciones de morfismos. Diremos que se tienen *diagramas conmutativos* de $A-$módulos. En el primer caso diremos que g' *se factoriza por* g, y en el segundo que h' *se factoriza por* h.

(b) Estas definiciones no garantizan la existencia de núcleos o co-núcleos. Sin embargo la propiedad universal que los define garantiza que, de existir, son únicos salvo isomorfismo.

1.12. **Proposición.** *Sea $f : M \to N$ un morfismo de $A-$módulos.*

(a) *El conjunto* $\mathsf{Ker}\ f := \{m \in M | f(m) = 0\}$ *es un sub-módulo de M. Denotemos por $g : \mathsf{Ker}\ f \to M$ la inclusión. Entonces el par* $(\mathsf{Ker}\ f, g)$ *es un núcleo de f.*

(b) *El conjunto* $\mathsf{Im}\ f := \{f(m) | m \in M\}$ *es un sub-módulo de N. Denotemos por $p : N \to N/\mathsf{Im}\ f$ la proyección natural. Entonces el par* $(N/\mathsf{Im}\ f, p)$ *es un co-núcleo de f. En lo subsiguiente escribimos* $\mathsf{Coker}\ f = N/\mathsf{Im}\ f$

1.13. **Proposición.** *Dado un morfismo $f : M \to N$ es :*

(a) *Las condiciones a continuación son equivalentes:*

i. *La igualdad $fg_1 = fg_2$ implica $g_1 = g_2$ (es decir f es simplificable a la izquierda),*

ii. *f es inyectivo,*

iii. $\mathsf{Ker}\ f = 0$

En ese caso se dice que f es un monomorfismo *y se escribe* $M \overset{f}{\hookrightarrow} N$.

(b) *Las condiciones a continuación son equivalentes :*

i. *La igualdad $g_1 f = g_2 f$ implica $g_1 = g_2$ (es decir f es simplificable a la derecha),*

ii. *f es sobreyectivo,*

iii. $\mathsf{Coker}\ f = 0$

En ese caso se dice que f es un epimorfismo *y se escribe* $M \overset{p}{\twoheadrightarrow} M$.

Así, f es un isomorfismo de módulos si y solo si es un monomorfismo y un epimorfismo.

1.14. **Definición.** Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $A-$módulos.

(a) Un *producto directo* de $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el dato de un $A-$módulo $M = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, y, de un morfismo $p_\lambda : M \to M_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ tales que si M' es un $A-$módulo y se tiene morfismos $p'_\lambda : M' \to M_\lambda$ entonces existe un único morfismo $f : M' \to M$ tal que $p'_\lambda = p_\lambda f$ para todo λ.

$$\begin{tikzcd} M = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \arrow[r, "p_\lambda"] & M_\lambda \\ M' \arrow[u, dotted, "\exists! f"] \arrow[ur, "p'_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Un *co-producto*, o *suma directa* de $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el dato de un $A-$módulo $M = \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, y, de un morfismo $q_\lambda : M_\lambda \to M$ para cada $\lambda \in \Lambda$ tales que si M' es un $A-$módulo y se tiene morfismos $q'_\lambda : M_\lambda \to M'$ entonces existe un único morfismo $f : M \to M'$ tal que $q'_\lambda = f q_\lambda$ para todo λ.

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "q_\lambda"] \arrow[dr, "q'_\lambda"'] & M = \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

1.15. **Observación.** Como con la definición de núcleo y co-núcleo, estas definiciones no dan una manera explícita de construir los objetos. Sin embargo la propiedad universal hace que de existir, son únicos salvo isomorfismo.

1.16. **Proposición.** *Dada una familia $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $A-$módulos :*

(a) *Su producto es el producto cartesiano usual. Un elemento de $M = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un "vector" $\mathbf{m} = (m_\lambda)_\Lambda$ con $m_\lambda \in M_\lambda$ para cada λ. Las aplicaciones $p_\lambda : M \to M_\lambda$ son las proyecciones usuales.*

(b) *Su co-producto es el sub-módulo de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ formado por los elementos $m = (m_\lambda)_\Lambda$ tales que $m_\lambda = 0$, salvo para un número finito de índices. En este caso, las aplicaciones q_λ son las inclusiones naturales.*

Ha de notarse también que si el conjunto de índices es finito, entonces el producto y el co-producto coinciden. Si se tiene dos $A-$módulos, suele escribirse $M = M_1 \times M_2$ o también $M = M_1 \oplus M_2$.

1.17. **Ejemplo.** Un $A-$ módulo M es *libre* si es isomorfo a una suma directa de copias de $A : M \simeq \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, donde $A_\lambda \simeq A$ para todo λ. En tal caso, M tiene una base (esto es un conjunto generador linealmente independiente) dada por los vectores $\mathbf{e}_\lambda$, definidos por

$$(\mathbf{e}_\lambda)_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En este caso escribimos $A^{(\Lambda)}$ y tenemos una aplicación natural $\iota : \Lambda \to A^{(\Lambda)}$ definida por $\lambda \mapsto \mathbf{e}_\lambda$, y decimos que M es un $A-$*módulo libre sobre* Λ. Éste verifica la propiedad universal a continuación : si $\varphi : \Lambda \to N$ es una aplicación, con N un $A-$módulo, entonces existe un único morfismo de $A-$módulos $\tilde{\varphi} : \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to N$ tal que $\tilde{\varphi}\iota = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A^{(\Lambda)} \arrow[d, dotted, "\exists! \tilde{\varphi}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Todo espacio vectorial admite una base, esto es, todo $\mathbb{R}-$módulo tiene una base. Lo mismo no es cierto para grupos abelianos.

Veamos ahora como se comportan $\mathsf{Hom}_A\,(X,\,-)$ y $\mathsf{Hom}_A\,(-,\,X)$ con las sumas y productos.

1.18. **Proposición.** *Dados módulos* $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *y* X*, se tiene :*

(a) $\mathsf{Hom}_A\left(X,\,\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \simeq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}_A\,(X,\,M_\lambda)$*, y ;*

(b) $\mathsf{Hom}_A\left(\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\,X\right) \simeq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}_A\,(M_\lambda,\,M)$*.*

1.19. **Observaciones.**

(a) Existen ejemplos que muestran que los otros isomorfismos que uno puede ser tentado a exhibir no son ciertos.

(b) Hay que notar que $\mathsf{Hom}_A\,(-,\,X)$ transforma co-productos (o sumas) en productos, salvo claro, si se trata de un co-producto finito. Por ejemplo si $M = M_1 \coprod M_2$, entonces

$$\mathsf{End}_A(M) = \mathsf{Hom}_A\left(M_1 \coprod M_2,\, M_1 \coprod M_2\right) \simeq \prod_{i,j=1,2} \mathsf{Hom}_A\,(M_i,\,M_j) \simeq \begin{bmatrix} \mathsf{Hom}_A\,(M_1,\,M_1) & \mathsf{Hom}_A\,(M_2,\,M_1) \\ \mathsf{Hom}_A\,(M_1,\,M_2) & \mathsf{Hom}_A\,(M_2,\,M_2) \end{bmatrix}$$

donde la última expresión da la estructura de $\mathsf{End}_A(M)$ como anillo de matrices.

Para concluir esta sección tratemos una variante de las nociones de producto y co-producto.

1.20. **Definición.**

(a) Dados dos morfismos $f_1 : M_1 \to M$ y $f_2 : M_2 \to M$, su *producto fibrado* es el dato de un módulo E y dos morfismos $p_1 : E \to M_i$ tales que:

I. $f_2 p_2 = f_1 p_1$ y

II. Si $p_1' : E' \to M$ y $p_2' : E' \to M$ son tales que $f_1 p_1' = f_2 p_2'$ entonces existe un único $g : E' \to E$ tal que $p_1' = p_1 g$ y $p_2' = g p_2'$

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] \arrow[drr, bend left, "p_2'"] \arrow[ddr, bend right, "p_1'"'] & & \\ & E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M \end{tikzcd}$$

(b) Dados dos morfismos $f_1 : M \to M_1$ y $f_2 : M \to M_2$, su *suma amalgamada* es el dato de un módulo L y dos morfismos $q_i : M_i \to L$ tales que:

I. $q_2 f_2 = q_1 f_1$ y

II. Si $q_1' : M_1 \to L'$ y $q_2' : M_2 \to L'$ son tales que $q_1' f_1 = q_2' f_2$ entonces existe un único $h : L \to L'$ tal que $q_1' = h q_1$ y $q_2' = h q_2'$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[d, "q_2"] \arrow[ddr, bend left, "q_2'"] & \\ M_1 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[drr, bend right, "q_1'"'] & L \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] & \\ & & L' \end{tikzcd}$$

1.21. **Proposición.**

(a) *El producto fibrado de* $f_1 : M_1 \to M$ *y* $f_2 : M_2 \to M$ *está dado por el módulo*

$$E = \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 | f_1(m_1) = f_2(m_2)\}$$

y las proyecciones $p_i : E \to M_i$ *son las aplicaciones naturales.*

(b) *La suma amalgamada de* $f_1 : M \to M_1$ *y* $f_2 : M \to M_2$ *está dada por el módulo cociente*

$$L = \frac{M_1 \oplus M_2}{\{(f_1(m), -f_2(m)) | m \in M\}}$$

y las aplicaciones $q_i : M_i \to L$ *son las aplicaciones naturales (se verifica que están correctamente definidas).*

1.22. **Ejemplos.**

(a) Si M_1 y M_2 son sub-módulos de M, entonces el producto fibrado de las inclusiones $\iota_1 : M_1 \to M$ y $\iota_2 : M_2 \to M$ es la intersección $M_1 \cap M_2$. A su vez, la suma amalgamanda de las inclusiones $j_1 : N_1 \cap N_2 \to N_1$ y $j_2 : N_1 \cap N_2 \to N_2$ es la suma $N_1 + N_2$.

(b) El producto fibrado de $f : M \to N$ y de la aplicación nula $0 : 0 \to N$ es simplemente el núcleo de f. Dualmente, la suma amalgamada de $f : M \to N$ y de la aplicación nula $0 : M \to 0$ es el co-núcleo de f.

(c) El producto fibrado de $0 : M_1 \to 0$ y $0 : M_2 \to 0$ es el producto directo $M_1 \times M_2$. Del mismo modo, la suma amalgamada de $0 : 0 \to M_1$ y $0 : 0 \to M_2$ es la suma directa $M_1 \oplus M_2$. En este ejemplo es importante que la suma y el producto coinciden.

2. Sucesiones exactas

2.1. **Definición.** Una sucesión de dos morfismos de $A-$módulos $L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N$ es *exacta (en M)* si es que $\mathsf{Im}\ f = \mathsf{Ker}\ g$. Una sucesión larga de morfismos es exacta si cada composición de dos morfismos es exacta.

Nótese que esto en particular implica que $gf = 0$, pero no es una condición equivalente. En efecto, $gf = 0$ equivale a decir $\mathsf{Im}\ f \subseteq \mathsf{Ker}\ g$.

2.2. **Ejemplos.**

(a) Si $N \leqslant M$, entonces la sucesión $N\overset{\iota}{\hookrightarrow}M\overset{p}{\twoheadrightarrow}M/N$ es exacta en M.

(b) $f : M \to N$ es un monomorfismo si y solo si $0\longrightarrow M\xrightarrow{f}N$ es exacta

(c) $f : M \to N$ es un epimorfismo si y solo si $M\xrightarrow{f}N\longrightarrow 0$ es exacta

(d) $f : M \to N$ es un isomorfismo si y solo si $0\longrightarrow M\xrightarrow{f}N\longrightarrow 0$ es exacta en M y N.

2.3. **Proposición.**

(a) *La sucesión* $0\longrightarrow L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\longrightarrow 0$ *es exacta si y solo si $N \simeq M/L$. Es más, en este caso se tiene que* $\mathsf{Ker}\ g \simeq L$ *y que* $\mathsf{Coker}\ f \simeq N$. *Una sucesión exacta de 5 términos como la precedente se llama una* sucesión exacta corta.

(b) *A un morfismo $f : M \to N$ le corresponden dos sucesiones exactas cortas*

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\ f \longrightarrow M \longrightarrow \mathsf{Im}\ f \longrightarrow 0 \qquad y \qquad 0 \longrightarrow \mathsf{Im}\ f \longrightarrow N \longrightarrow N/\mathsf{Im}\ f \longrightarrow 0\ .$$

La sucesiones exactas se pueden pegar y cortar

2.4. **Lema** (Cortar y pegar). *Si la sucesión $A-$módulos $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} K$ es exacta, sea $X := \mathsf{Im}\ g = \mathsf{Ker}\ h$ entonces también lo son las sucesiones*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \qquad y \qquad 0 \longrightarrow X \longrightarrow N \xrightarrow{h} K\ .$$

La recíproca también vale.

2.5. **Observación.** Usando varias veces este resultado es posible descomponer una sucesión exacta larga en varias sucesiones exactas cortas.

2.6. **Ejemplos.**

(a) Al pegar las sucesiones exactas asociadas a $f : M \to N$ se obtiene una sucesión exacta asociada a f :

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\ f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathsf{Coker}\ f \longrightarrow 0$$

(b) Si se tiene una sucesión exacta larga de $\mathbb{R}-$módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\ M_i = 0$

2.7. **Lema** (de la serpiente). *A un diagrama conmutativo de líneas exactas dado por las líneas del medio del diagrama de abajo le corresponde un diagrama conmutativo de líneas exactas en el que la "serpiente" (la sucesión que empieza en* $\mathsf{Ker}\ u$ *y llega hasta* $\mathsf{Coker}\ w$*) es una sucesión exacta.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Ker}\ u \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\ v \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\ w \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] & \\
 & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N' \arrow[d] & \\
 & \mathsf{Coker}\ u \arrow[r] & \mathsf{Coker}\ v \arrow[r] & \mathsf{Coker}\ w &
\end{tikzcd}$$

Además, si f es un monomorfismo, lo mismo ocurre con el morfismo $\mathsf{Ker}\ f \to \mathsf{Ker}\ g$ *y si g' es un epimorfismo, lo mismo ocurre con el morfismo* $\mathsf{Coker}\ v \to \mathsf{Coker}\ w$.

2.8. **Proposición.** *Sea* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta.*
(*a*) *El producto fibrado de* g *y* $w : W \to N$ *se completa a un diagrama conmutativo de líneas exactas :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathbb{1}"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(*b*) *La suma amalgamada de* f *y* $u : U \to L$ *se completa a un diagrama conmutativo de líneas exactas :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

2.9. **Observación.** Si bien el dato de los dos primeros módulos y el primer morfismo en una sucesión exacta corta nos permite deducir la estructura del tercero; y, así mismo, conocer el segundo y tercer módulos junto con el segundo morfismo nos permite conocer el primer módulo y morfismo, el conocimiento de los dos módulos de los extremos no es suficiente para determinar el del medio.

2.10. **Ejemplo.** Consideremos las dos sucesiones exactas cortas de $\mathbb{Z}-$módulos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{[0\ 1]} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0\ .$$

donde f es inducido por la multiplicación por 2, y g es el co-núcleo.

En la segunda sucesión, tenemos que f es una aplicación inyectiva, de modo que posee une aplicación inversa. Ésta no es, sin embargo, un morfismo de $\mathbb{Z}-$módulos.

2.11. **Definición.** Un morfismo $f : M \to N$ es :
(*a*) Una *sección* si es que existe $f' : N \to M$ tal que $f'f = \mathbb{1}_M$,
(*b*) Una *retracción* si es que existe $f' : N \to M$ tal que $ff' = \mathbb{1}_N$.

Nótese que toda sección es un monomorfismo, y toda retracción es un epimorfismo, pero las recíprocas no son ciertas por lo general.

2.12. **Proposición.** *Sea la sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes :*
(*a*) f *es una sección,*
(*b*) g *es una retracción,*
(*c*) *Existen* $f' : M \to L$ *y* $g' : N \to M$ *tales que* $ff' + g'g = \mathbb{1}_M$
De ser el caso, se dice que la sucesión es escindida*, y se tiene que* $M \simeq L \oplus N$.

2.13. **Observación.** Para $\mathbb{R}-$módulos, es decir espacios vectoriales, se tiene que toda sucesión exacta corta escinde, ya que toda transformación lineal inyectiva admite un inverso a la derecha, o todo sub-espacio admite un complemento. También, en este caso siempre existen bases, de modo que dada una transformación lineal sobreyectiva, es posible construir una inversa a la izquierda.

2.14. **Proposición.** *Toda sucesión exacta corta cuyo cuarto término es un módulo libre es escindida.*

3. Complejos de módulos

3.1. **Definición.** Un *complejo* (descendente) de $A-$módulos es una sucesión $\mathbf{M} = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donde cada M_n es un $A-$módulo, y $d_n : M_n \to M_{n-1}$ es un morfismo de módulos tales que $d_n d_{n+1} = 0$. La familia (d_n) es la *diferencial* del complejo. De la misma manera se define un complejo ascendente.

3.2. **Ejemplos.** Consideremos las figuras a continuación, la primera, $\mathbf{X}$ es un triángulo lleno, y la segunda, $\mathbf{X}'$ está dada por los bordes únicamente. En ambos casos indicamos una orientación de los segmentos. A cada figura asociamos un complejo de $\mathbb{Z}$-módulos donde el $i-$ésimo módulo del complejo tiene como base los objetos de dimensión i, y las diferenciales están dadas por el borde. Más precisamente :

$\mathbf{X}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbf{X}'$

(a) El complejo $\mathbf{M}$ asociado a $\mathbf{X}$ está compuesto por tres $\mathbb{R}$-módulos no nulos
- $M_2 = \mathbb{R}[a, b, c]$, esto es, M_2 es el $\mathbb{R}-$módulo libre de base $\{[a, b, c]\}$, el triángulo lleno, es decir el único objeto de dimensión 2.
- $M_1 = \mathbb{R}[a, b] \oplus \mathbb{R}[b, c] \oplus \mathbb{R}[c, a]$, esto es el $\mathbb{R}-$módulo libre de base $\{[a, b], [b, c], [c, a]\}$,
- $M_0 = \mathbb{R}[a] \oplus \mathbb{R}[b] \oplus \mathbb{R}[c]$

Por otro lado, convenimos que $-[a, c] = [c, a]$, y definimos las diferenciales sobre los elementos de base mediante $d_2([a, b, c]) = [b, c] - [a, c] + [a, b]$ y

$$d_1([b, c]) = [c] - [b], \qquad d_1([c, a]) = [c] - [a], \qquad d_1([b, c]) = [c] - [b].$$

(b) El complejo $\mathbf{M}'$ asociado a $\mathbf{X}'$ está dado por los $\mathbb{R}-$módulos $M_1' = M_1, M_0' = M_0$, con $d_1' = d_1$, y $M_i' = 0$ para $i \neq 0, 1$.

Notemos que en ambos casos se tiene que $[b, c] - [a, c] + [a, b]$ pertenece al núcleo de la diferencial respectiva. Decimos entonces que se trata de un *ciclo*. En el primer caso, sin embargo, este ciclo es precisamente la imagen de un elemento de M_2, se trata del *borde* de dicho elemento.

3.3. **Definición.** Un *morfismo* de complejos $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ es el dato de una familia de morfismos $f_n : M_n \to M_n'$ tales que $d_n' f_n = f_{n-1} d_n$. En este caso decimos que los morfismos f_n *conmutan con las diferenciales.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[d, "\mathbf{f}"] \\ \mathbf{M}' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & M_n' \arrow[r, "d_n'"'] & M_{n-1}' \arrow[r, "d_{n-1}'"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

De manera natural se tiene las nociones de sub-complejo, y de complejo cociente, lo importante es que las inclusiones y las proyecciones deben ser morfismos de complejos, el solo dato de los módulos no es suficiente.

3.4. **Ejemplo.** En el ejemplo anterior $\mathbf{M}'$ es un sub-complejo de $\mathbf{M}$. Existe un morfismo evidente, la inclusión $\iota : \mathbf{M}' \to \mathbf{M}$, pero no existe ningún morfismo de complejos no nulo en el otro sentido,

3.5. **Definición.** Dado un complejo $\mathbf{M}$, definimos :

(a) Su $i-$ésimo módulo de ciclos como $\mathsf{Z}_i(\mathbf{M}) = \mathsf{Ker}\ d_i$

(b) Su $i-$ésimo módulo de bordes como $\mathsf{B}_i(\mathbf{M}) = \mathsf{Im}\ d_{i+1}$

(c) Su $i-$ésimo módulo de homología como como $\mathsf{H}_i(\mathbf{M}) = \mathsf{Z}_i(\mathbf{M})/\mathsf{B}_i(\mathbf{M})$

3.6. **Observación.** Notemos que en un complejo, dado que $d_n d_{n+1} = 0$, siempre tenemos que $\mathsf{B}_i(\mathbf{M}) \subseteq \mathsf{Z}_i(\mathbf{M})$, y la igualdad se da si se tiene exactitud en M_i. Así, el cociente

$$\mathsf{H}_i(\mathbf{M}) = \frac{\mathsf{Z}_i(\mathbf{M})}{\mathsf{B}_i(\mathbf{M})} = \frac{i - \text{ciclos de } \mathbf{M}}{i - \text{bordes de } \mathbf{M}}$$

mide el defecto de exactitud en M_i, es decir que mide los ciclos que no son bordes

3.7. **Ejemplo.** En el ejemplo anterior se tiene que $\mathsf{Z}_1(\mathbf{M})$ es generado por $[b,c]-[a,c]+[a,b]$, pero se trata de un elemento de $\mathsf{B}_i(\mathbf{M})$, de modo que $\mathsf{H}_i(\mathbf{M})=0$. Por otro lado $\mathsf{H}_1(\mathbf{M}')\simeq\mathbb{R}$, se tiene un ciclo que no es borde, y esto modeliza con precisión el hecho que $\mathbf{X}'$ posee un agujero, y $\mathbf{X}$ no.

Por otro lado tenemos que $\mathsf{H}_0(\mathbf{M})\simeq\mathsf{H}_0(\mathbf{M}')\simeq\mathbb{R}$, los $0-$ésimos módulos de homología miden el número de componentes conexas de las figuras consideradas.

3.8. **Proposición.** *Si* $\mathbf{f}:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ *es un morfismo de complejos, entonces tenemos morfismos inducidos en homología :* $\mathsf{H}_i(\mathbf{f}):\mathsf{H}_i(\mathbf{M})\to\mathsf{H}_i(\mathbf{M}')$ *definido, por* $x+\mathsf{Im}\ d_{i+1}\mapsto f_i(x)+\mathsf{Im}\ d'_{i+1}$. *Además se tiene que*

(a) *Si* $\mathbf{g}:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ *entonces* $\mathsf{H}_i(\mathbf{f}+\mathbf{g})=\mathsf{H}_i(\mathbf{f})+\mathsf{H}_i(\mathbf{g})$,

(b) *Si* $\mathbf{g}:\mathbf{M}'\to\mathbf{M}''$ *entonces* $\mathsf{H}_i(\mathbf{gf})=\mathsf{H}_i(\mathbf{g})\mathsf{H}_i(\mathbf{f})$.

3.9. **Definición.** Sean $\mathbf{f},\mathbf{g}:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ dos morfismos de complejos. Se dice que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son *homotópicos*, en cuyo caso se escribe $\mathbf{f}\sim\mathbf{g}$, si es que existe, para todo $n\in\mathbb{N}$, morfismos $s_n:M_n\to M'_{n+1}$ tales que $d'_{n+1}s_n+s_{n-1}d_n=f_n-g_n$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "g_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left, "f_n"] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

en este caso, se dice que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *homotopía* entre $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$.

3.10. **Lema.** *Si* $\mathbf{f}\sim\mathbf{g}$, *entonces* $\mathsf{H}_i(\mathbf{f})=\mathsf{H}_i(\mathbf{g})$, *para todo* i.

3.11. **Definición.**

(a) Un morfismo de complejos $\mathbf{f}$ es un *cuasi-isomorfismo* si es que para todo i, el morfismo $\mathsf{H}_i(\mathbf{f})$ es un ismorfismo.

(b) Una *contracción de homotopía* es una homotopía entre $\mathbb{1}_{\mathbf{M}}$ y $0_{\mathbf{M}}$

3.12. **Observación.** Nótese que si existe una contracción de homotopía en un complejo $\mathbf{M}$, entonces éste es exacto. En efecto, los morfismos inducidos en homología por $\mathbb{1}_{\mathbf{M}}$ y $0_{\mathbf{M}}$ son el mismo morfismo, esto es :

$$0_{\mathsf{H}_i(\mathbf{M})}=\mathsf{H}_i(0_{\mathbf{M}})=\mathsf{H}_i(\mathbb{1}_{\mathbf{M}})=\mathbb{1}_{\mathsf{H}_i(\mathbf{M})}$$

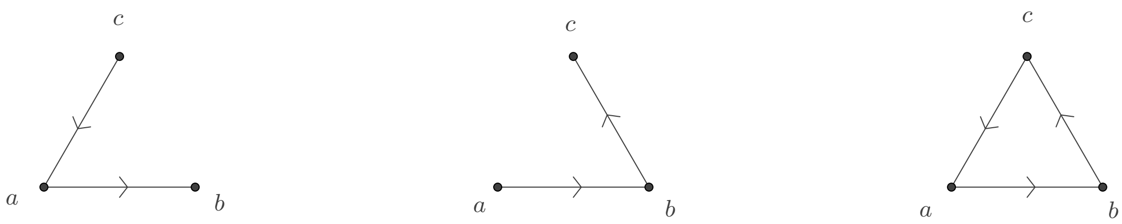
de donde sigue el resultado. Este es un método práctico para demostrar que un complejo es exacto.

Teorema. *Si* $0\longrightarrow\mathbf{L}\xrightarrow{\ \mathbf{f}\ }\mathbf{M}\xrightarrow{\ \mathbf{g}\ }\mathbf{N}\longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta de complejos, entonces se tiene una sucesión exacta larga de módulos de homología :*

$$\cdots\longrightarrow\mathsf{H}_i(\mathbf{L})\xrightarrow{\mathsf{H}_i(\mathbf{f})}\mathsf{H}_i(\mathbf{M})\xrightarrow{\mathsf{H}_i(\mathbf{g})}\mathsf{H}_i(\mathbf{N})\xrightarrow{\ \delta_i\ }\mathsf{H}_{i-1}(\mathbf{L})\xrightarrow{\mathsf{H}_{i-1}(\mathbf{f})}\cdots$$

Los morfismos δ_i *son dados por el lema de la serpiente, y usualmente se llaman* morfismos de conexión.

3.13. **Ejemplo.** Consideremos la división del triágulo $\mathbf{Y}$ como reunión de dos pedazos, $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$, cuya intersección $\mathbf{U}$ consta del segmento $[a,b]$ por un lado, y del punto $[c]$ por otro Denotemos mediante $\mathbf{U},\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{Y}$



$\mathbf{X}_1$ $\mathbf{X}_1$ $\mathbf{Y}$

a los complejos de $\mathbb{R}-$módulos resultantes. Se tienes entonces una sucesión exacta corta de complejos

$$0\longrightarrow\mathbf{U}\longrightarrow\mathbf{X}_1\oplus\mathbf{X}_2\longrightarrow\mathbf{Y}\longrightarrow 0$$

donde el primer morfismo está dado por la inclusión. Esto da lugar a una sucesión exacta larga de homología

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_2(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathsf{H}_1(\mathbf{U}) \longrightarrow \mathsf{H}_1(\mathbf{X}_1) \oplus \mathsf{H}_1(\mathbf{X}_2) \longrightarrow \mathsf{H}_1(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\delta_1} \mathsf{H}_0(\mathbf{U}) \longrightarrow \mathsf{H}_0(\mathbf{X}_1) \oplus \mathsf{H}_0(\mathbf{X}_2) \longrightarrow \cdots$$

Así, el conocimiento de $\mathsf{H}_i(\mathbf{X}_1), \mathsf{H}_i(\mathbf{X}_2)$ y $\mathsf{H}_i(\mathbf{U})$ permite determinar los $\mathsf{H}_i(\mathbf{Y})$

3.14. **Observación.** En el ejemplo precedente, tenemos dos monomorfismos de complejos $\mathbf{U} \to \mathbf{X}_1$ y $\mathbf{U} \to \mathbf{X}_2$, esto es, tanto $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ tiene un sub-complejo común isomorfo a $\mathbf{U}$. Se tiene que de hecho $\mathbf{Y}$ es la suma amalgamada de los complejos $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ (ver 1.21). Es más, la figura $\mathbf{Y}$ se obtiene pegando las figuras $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ identificando sus partes comunes,$\mathbf{U}$ (ver 1.22 y 2.8).