Ejercicios Lección n°7: Modos de convergencia

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Verdadero o falso

Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifíquelo (hay que tratar todos los casos posibles).

1. La convergencia en μ-c.t.p. implica la convergencia en μ-medida.
2. La convergencia en L^p implica la convergencia μ-casi uniforme.
3. La convergencia uniforme implica la convergencia μ-c.t.p.
4. La convergencia simple implica la convergencia en L^p.
5. La convergencia uniforme implica la convergencia en L^p.
6. La convergencia en μ-medida implica la convergencia en μ-casi uniforme.

Ejercicio 2 — Convergencia en μ medida local

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathscr{A}$-medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Diremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia f en el *sentido de la convergencia en μ-medida local* si para todo conjunto $\mathscr{A}$-medible A de medida finita se tiene

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Notamos entonces $L_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ el espacio de clases de funciones dotado de la convergencia en μ-medida local.

1. Mostrar que la convergencia en μ-medida implica la convergencia en μ-medida local pero que no se tiene la recíproca.
2. ¿En qué situación estas dos nociones de convergencia son equivalentes?
3. Nos proponemos demostrar que la topología de la convergencia en μ-medida local es metrizable. Para ello suponemos de ahora en adelante que $\mu(X) = +\infty$.
   a) Dado que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito, existe una partición disjunta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $1 \leq \mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos entonces la función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como
   $$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}\mu(A_j)} \mathbb{1}_{A_j}(x). \tag{1}$$
   Mostrar que se tiene $0 < \varphi(x) < 1$ en μ-casi todas partes y $\int_X \varphi d\mu = 1$.
   b) Para $f, g \in L_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ mostrar que la fórmula siguiente está bien definida y determina una distancia.
   $$d(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \varphi(x) d\mu(x) \tag{2}$$
4. Mostremos que la convergencia en μ-medida local implica la convergencia en el sentido de la distancia (2).
   a) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tales que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-medida local con $f, f_n \in L_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y sea $\varepsilon > 0$ un real. ¿Bajo qué argumento existe un conjunto medible Y de medida finita tal que
   $$\int_{Y^c} \frac{|f(x) - f_n(x)|}{1 + |f(x) - f_n(x)|} \varphi(x) d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}? \tag{3}$$
   b) Una vez que hemos fijado este conjunto considerar la función $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ y verificar que existe un real $\alpha \in [0, +\infty[$ tal que para todo $0 \leq x \leq \alpha$ se tiene
   $$\frac{x}{1+x} \leq \frac{\varepsilon}{3\mu(Y)}. \tag{4}$$
   c) Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-medida local, mostrar que existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene
   $$\mu(\{x \in Y : |f(x) - f_n(x)| > \alpha\}) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

d) Con estas tres estimaciones (3), (4) y (5) mostrar que

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|f(x)-f_n(x)|}{1+|f(x)-f_n(x)|}\varphi(x)d\mu(x) &= \int_{Y^c} \frac{|f(x)-f_n(x)|}{1+|f(x)-f_n(x)|}\varphi(x)d\mu(x) \\ &+ \int_{Y\cap\{|f-f_n|\leq\alpha\}} \frac{|f(x)-f_n(x)|}{1+|f(x)-f_n(x)|}\varphi(x)d\mu(x) \\ &+ \int_{Y\cap\{|f-f_n|>\alpha\}} \frac{|f(x)-f_n(x)|}{1+|f(x)-f_n(x)|}\varphi(x)d\mu(x) \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Deducir que si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-medida local entonces se tiene que $d(f,f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Mostrar que si $d(f,f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-medida local. Para ello seguir los pasos siguientes:
   a) Definimos los conjuntos $K_m = \bigcup_{j=0}^m A_j$. Utilizando la definición de la función φ en (1), mostrar que para todo $x \in K_m$ se tiene la minoración
   $$\varphi(x) \geq \alpha_m \quad \text{en donde hemos notado} \quad \alpha_m = \min_{0\leq j<m}\{1/(2^{j+1}\mu(A_j)) > 0\}. \tag{6}$$
   b) Sea $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) < +\infty$. Mostrar que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A\cap K_M^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\alpha > 0$ se tiene
   $$\mu(\{x \in A\cap K_M^c : |f_n(x)-f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
   c) Mostrar que para todo $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que $|f_n(x)-f(x)| > \alpha \iff \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} > \beta$ y deducir, utilizando el punto $5-a)$ que
   $$\mu(\{x \in A\cap K_M : |f_n(x)-f(x)| > \alpha\}) \leq \mu(\{x \in A\cap K_M : \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} > \beta/\alpha_M\})$$
   d) Utilizar la desigualdad de Tchebychev en la expresión anterior y mostrar que si $d(f,f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-medida local.

Ejercicio 3 — Propiedad de Lusin

Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido con la medida μ una medida regular y sea f una aplicación definida sobre X a valores sobre $\mathbb{K}$.

1. Mostrar que si f es medible entonces, para todo compacto $K \subset X$ y para todo $\delta > 0$, existe un compacto $K_\delta \subset K$ tal que $\mu(K\setminus K_\delta) \leq \delta$.
2. Mostrar que la restricción de f a K_δ es una aplicación continua de K_δ en $\mathbb{K}$.
3. Verificar que este resultado, conocido como la propiedad de Lusin, se mantiene si en vez de $\mathbb{K}$ se tiene un espacio métrico separable.
4. ¿Qué moraleja se puede obtener de este importante resultado?

   (Indicación: para 1 & 2 empezar por funciones simples y pasar al caso general)