Lección n°3: Rápida introducción a las ecuaciones de Navier-Stokes

EPN & USFQ Septiembre 2018

Índice

1. Introducción

El objetivo de esta lección es hacer una rápida introducción a las ecuaciones de Navier-Stokes en todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Antes de entrar en el estudio de estas ecuaciones conviene fijar las siguientes notaciones y definiciones:

- De ahora en adelante trabajaremos con funciones vectoriales $\vec{u} = (u_1, u_2; u_3) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $u_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1,2,3$, y conviene fijar la siguiente notación: dado un espacio funcional $(E, \|\cdot\|_E)$ (con $\|\cdot\|_E \longrightarrow [0, +\infty[$ una norma o semi-norma definida sobre E) diremos que la función vectorial $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ pertenece al espacio E, lo que notaremos como $\vec{u} \in E$, si solo si $u_i \in E$ para $i = 1,2,3$. Se tiene además $\|\vec{u}\|_E = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_E$.

- Dadas dos funciones vectoriales $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definimos su producto tensorial $\vec{u} \otimes \vec{v}$ como la matriz
$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}.$$

- Dada una función vectorial $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y el operador gradiente $\vec{\nabla}$ definido por $\vec{\nabla}\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$, definimos el tensor de derivadas $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ como la matriz
$$\vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 & \partial_1 u_3 \\ \partial_2 u_1 & \partial_2 u_2 & \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_1 & \partial_3 u_2 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}.$$

- Dado un espacio funcional $(E, \|\cdot\|_E)$ y dos funciones vectoriales $\vec{u}, \vec{v}$, se tiene $\vec{u} \otimes \vec{v} \in E$ si y solamente si $u_iv_j \in E$ para todo $i, j = 1,2,3$, y se tiene además $\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_E = \sum_{i,j=1}^{3} \|u_iv_j\|_E$.

  De igual manera se tiene $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in E$ si y solo si $\partial_i u_j \in E$ para todo $i, j = 1,2,3$, y se tiene además $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_E = \sum_{i,j=1}^{3} \|\partial_i u_j\|_E$.

2. Presentación de las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describen matemáticamente el movimiento de los fluidos viscosos a través del estudio de su campo de velocidad. Estas ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0, \quad \nu > 0, \quad \text{sobre }]0, T[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \quad div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

En estas ecuaciones la velocidad del fluido $\vec{u} : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y la presión de fluido $p : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son las *incógnitas* mientras que la fuerza exterior que se ejerce sobre el fluido $\vec{f} : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y la velocidad del fluido en el tiempo $t = 0$: $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son los *datos* del problema.

Describamos rápidamente cada termino de estas ecuaciones:

- La derivada con respecto al tiempo de la velocidad

  $$\partial_t \vec{u} = (\partial_t u_1, \partial_t u_2, \partial_t u_3),$$

  describe la evolución del fluido en el transcurso del tiempo: como dato del problema conocemos la velocidad del fluido en el instante $t = 0$:

  $$\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0,$$

  y entonces queremos conocer la velocidad del fluido en un tiempo ulterior $t \in]0, T[$: $\vec{u}(t, \cdot)$. Se tratan entonces de ecuaciones de *evolución.*

- El término de *difusión* de estas ecuaciones está dado por

  $$\nu \Delta \vec{u} = \nu(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3),$$

  donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad del fluido. Este término de difusión modela la propagación (o difusión) del fluido cuando este se derrama y la constante de viscosidad $\nu > 0$ es un parámetro que mide la *intensidad* con la que el fluido se derrama. Por ejemplo, la miel es más viscosa que el agua y por lo tanto tiene mayor resistencia al derramamiento.

  Desde el punto de vista matemático la palabra *difusión* se entiende en el sentido de la ecuación del calor: si escribimos

  $$\partial \vec{u} = \nu \Delta \vec{u},$$

  obtenemos la ecuación del calor.

  Dado que nos interesamos unicamente en un estudio matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes y no es un estudio físico de estas ecuaciones supondremos de ahora en adelante $\nu = 1$.

- El término de *transporte* de estas ecuaciones viene dado por

  $$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_1, \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_2, \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_3 \right),$$

  y este término modela el movimiento (o desplazamiento) del fluido. Este término da el carácter *no lineal* a las ecuaciones de Navier-Stokes y ahora explicaremos (rápidamente) por qué este término vuelve *difícil* el estudio de estas ecuaciones. Recordemos que la ecuación de transporte *lineal* se escribe como

  $$\partial \vec{u} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}, \tag{2}$$

y esta ecuación describe la forma en que se mueve el fluido con respecto al campo de velocidad $\vec{B}$ que es un *dato* del problema (2).

En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de transporte asociada se escribe como

$$\partial_t \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u},$$

y tenemos ahora una ecuación *no lineal*. Esto significa que la forma en que se mueve el fluido depende de la velocidad del mismo fluido y esto hace dificil el estudio (matemático y físico) de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Dado que las ecuaciones de Navier-Stokes poseen un término de transporte y un término de difusión se tratan de ecuaciones de *transporte-difusión*.

- El gradiente de presión está dado por el término

$$\vec{\nabla} p = (\partial_1 p, \partial_2 p, \partial_3 p),$$

y este término describe las fuerzas internas de *repulsión* entre la moléculas del fluido.

- Como ya se mencionó, toda fuerza *externa* que actúa sobre el fluido, como por ejemplo la gravedad en el caso de una cascada de agua o las hélices de un barco en el agua, está descrita por el término

$$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3),$$

que es un *dato del problema*.

- Finalmente, la condición de divergencia nula de la velocidad del fluido, dada por la ecuación

$$div(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_i = 0,$$

describe el carácter *incompresible* del fluido: el espacio ocupado por una cantidad del fluido en un instante de tiempo t_1 puede cambiar de forma al instante de tiempo t_2 *pero no cambia de volumen*. El agua es un ejemplo de fluido de fluido incompresible mientras que el aire es un ejemplo de un fluido compresible.

⇒ En este curso consideraremos siempre fluidos incompresibles y veremos además cómo la condición de divergencia nula ($div(\vec{u}) = 0$) es de gran utilidad desde el punto de vista matemático. Actualmente, hay una parte muy activa en la investigación sobre las ecuaciones de Navier-Stokes donde se estudia (matemáticamente) las propiedades de estas ecuaciones pero en el caso de fluidos compresibles cuando no se dispone de la hipótesis $div(\vec{u}) = 0$.

⇒ Por otro lado, para simplificar los cálculos que haremos de ahora en adelante, supondremos que la fuerza exterior $\vec{f}$ es también una función vectorial a divergencia nula:

$$div(\vec{f}) = 0.$$

Sin embargo, es importante señalar que todos los resultados que expondremos sobre las ecuaciones de Navier-Stokes que expondremos en este curso son totalmente validos en el caso más general cuando la fuerza $\vec{f}$ no es a divergencia nula.

Una consecuencia importante de la hipótesis de incompresibilidad del fluido ($div(\vec{u}) = 0$) es la siguiente: recordemos que en las ecuaciones de Navier-Stokes (1) se tienen dos incógnitas que son la velocidad del fluido $\vec{u}(t, x)$ y su presión $p(t, x)$. Veremos a continuación que gracias a la ecuación $div(\vec{u}) = 0$ estas dos incógnitas están fuertemente relacionadas.

En efecto, supongamos por un momento que $\vec{u}$ y p son solución de las ecuaciones (1), supongamos además que las funciones $\vec{u}$ y p son suficiente regulares. Puesto que $\vec{u}$ y p verifican las ecuaciones (1) al tomar el operador $div(\cdot)$ a cada lado estas ecuaciones se tiene

$$div\,(\partial_t \vec{u}) = div\left(\nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}\right)$$

y entonces escribimos

$$\partial_t(div(\vec{u})) = \nu\Delta(div(\vec{u})) - div((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - div(\vec{\nabla}p) + div(\vec{f}).$$

Observemos ahora que, como $div(\vec{u}) = 0$ entonces se tiene $\partial_t(div(\vec{u})) = 0$ y $\nu\Delta(div(\vec{u})) = 0$. Además hemos supuesto $div(\vec{f}) = 0$ y entonces en la identidad anterior se tiene

$$0 = -div((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - div(\vec{\nabla}p),$$

y como se tiene $div(\vec{\nabla}p) = \Delta p$, entonces podemos escribir

$$\Delta p = -div((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}). \tag{3}$$

Esta información es muy importante pues nos dice que las incógnitas de las ecuaciones de Navier-Stokes: $\vec{u}$ y p, están relacionadas por la ecuación (3). De manera más precisa, en esta ecuación podemos observar que si conocemos la velocidad $\vec{u}$ entonces obtenemos directamente la presión p dada como una solución de la ecuación de Poisson lineal y no homogénea (3).

Ahora que hemos presentado (muy rápidamente) las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, en la siguiente sección enunciaremos algunos resultados clásicos sobre sobre la existencia de soluciones de estas ecuaciones.

3. Principales resultados sobre la existencia de soluciones

Se quiere resolver el siguiente problema tambien conocido como problema de Cauchy para las ecuaciones de Navier-Stokes:

Problema 1 *Dados los siguientes datos:*

- *Un tiempo* $T_0 > 0$ *(en donde también podemos tomar* $T_0 = +\infty$*),*
- *una fuerza exterior* $\vec{f} : [0, T_0[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
- *Un dato inicial* $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

Se quiere encontrar un tiempo $0 < T_1 \leq T_0$ *y dos funciones* $\vec{u} : [0, T_1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *y* $p : [0, T_1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que el par* $(\vec{u}, p)$ *verifique las ecuaciones de Navier-Stokes (1).*

Si se tiene $T_1 = T_0$ decimos que la solución $(\vec{u}, p)$ es *global en tiempo* mientras que si se tiene $T_1 < T_0$ decimos que la solución $(\vec{u}, p)$ *local en tiempo.*

Exponemos a continuación (en orden cronológico) un *muy breve* panorama general de los principales resultados que se conocen hasta el momento cuando se quiere resolver el Problema 1. Es importante señalar que unicamente enunciaremos estos resultados y no insistiremos en ningún detalle técnico. En este sentido no se trata de un estudio riguroso sino más bien divulgativo.

3.1. Soluciones clásicas (1911)

La existencia de soluciones clásicas de las ecuaciones de Navier-Stokes está dada básicamente por los trabajos del matemático sueco *Carl Ossen* publicados en el año 1911 y se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1 (Soluciones clásicas) *Sea $T_0 > 0$ y sean los datos $\vec{f}$ y $\vec{u}_0$ tales que:*

- *para todo multi-indice $[a] \leq 2$ la función $\partial_x^a \vec{f}$ es continua sobre $[0, T_0[\times \mathbb{R}^3$ y $div(\vec{f}) = 0$,*
- $\displaystyle\sup_{t\in[0,T_0[, x\in\mathbb{R}^3} \sup_{[a]\leq 2} (1 + |x|^4)|\partial_x^a \vec{f}(t, x)| < +\infty$,
- *para todo multi-indice $[a] \leq 2$ la función $\partial_x^a \vec{u}_0$ es continua sobre $\mathbb{R}^3$ (es decir $\vec{u}_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$) y $div(\vec{u}_0) = 0$,*
- $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{[a]\leq 2} |(1 + |x|)|\partial_x^a \vec{u}_0(x)| < +\infty$.

Existe un tiempo $0 < T_1 < T_0$ (suficientemente pequeño) y $(\vec{u}, p)$ una única *solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (1) tal que*

- *para todo multi-indice $[a] \leq 2$ la función $\partial_x^a \vec{u}$ es continua sobre $[0, T_1[\times \mathbb{R}^3$*
- $\displaystyle\sup_{t\in[0,T_1[, x\in\mathbb{R}^3} \sup_{[a]\leq 2} (1 + |x|)|\partial_x^a \vec{u}(t, x)| < +\infty$,
- *para todo multi-indice $[a] \leq 2$ la función $\partial_x^a p$ es continua sobre $[0, T_1[\times \mathbb{R}^3$,*
- $\displaystyle\sup_{t\in[0,T_1[, x\in\mathbb{R}^3} \sup_{[a]\leq 2} (1 + |x|)|\partial_x^a(t, x)| < +\infty$,
- *la función $\partial_t \vec{u}$ es continua sobre $[0, T_1[\times \mathbb{R}^3$.*

⇒ En este primer resultado podemos observar que se tratan de *soluciones clásicas* en el sentido que todas la derivadas que se consideran aquí arriba son derivadas en el sentido clásico.

⇒ En el año 1911, donde se publicó este resultado, aun no se había desarrollado la teoría de soluciones débiles (y derivadas débiles de una función) por lo que este teorema fue demostrado usando herramientas clásicas del calculo diferencial.

⇒ La solución que se obtiene $(\vec{u}, p)$ es *única* y las funciones $\vec{u}$ y p son de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a la variable temporal y de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto a la variable espacial.

⇒ Es muy importante notar que en este resultado se tiene una solución *local en tiempo* definida sobre el intervalo de tiempo $[0, T_1[$. Se tiene entonces la siguiente dicotomía:

- Dado el tiempo $T_0 > 0$ existen soluciones clásicas pero en un tiempo muy pequeño $0 < T_1 < T_0$.
- Si queremos construir soluciones clásicas definidas para todo tiempo $t \in [0, T_0[$ (es decir soluciones *globales en tiempo*) entonces, en el estado actual de nuestros conocimientos, necesitamos que los datos del problema $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ sea pequeños:

$$\sup_{t\in[0,T_0[, x\in\mathbb{R}^3} \sup_{[a]\leq 2} (1 + |x|^4)|\partial_x^a \vec{f}(t, x)| < \varepsilon_0 \quad \text{y} \quad \sup_{t\in[0,T_0[, x\in\mathbb{R}^3} \sup_{[a]\leq 2} (1 + |x|^4)|\partial_x^a \vec{f}(t, x)| < \varepsilon_0,$$

  donde $\varepsilon_0 > 0$ es una constante *suficientemente* pequeña.

⇒ El problema de construir soluciones clásicas *globales en tiempo* y sin controlar el tamaño de los datos $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ es hasta la actualidad un *problema abierto*.

⇒ Tampoco sabemos si existen datos $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ tal que la solución $(\vec{u}, p)$ asociada a estos datos presente una *explosión en tiempo finito* y entonces no sea solución global en tiempo.

3.2. Soluciones débiles (1934)

En el año 1934 el matemático francés *Jean Leray* publica un *revolucionario* trabajo sobre la existencia de soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes. En su memoria intitulada *"Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissabt l'espace"* J. Leray introduce dos nociones **fundamentales** que abrieron la puerta al estudio moderno de las ecuaciones en derivadas parciales:

- la noción de derivada débil (que J. Leray llamó *quasi-derivada*) y la noción de espacio de Sobolev (lo que actualmente conocemos como el espacio $H^1(\mathbb{R}^3)$).
- la noción solución débil de una ecuación en derivadas parciales.

Con estas herramientas *completamente innovadoras para la época* Jean Leray muestra la existencia de *soluciones débiles globales en tiempo* de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Enunciaremos este resultado en su *versión moderna* usando como herramientas de base los espacios de Lebesgue y de Sobolev introducidos en las lecciones precedentes y para ello conviene fijar la siguientes definiciones: sea una función vectorial $\vec{\varphi} : [0, T_0] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ entonces:

- Dados los parámetros $1 \leq p, q \leq +\infty$ se tiene $\vec{\varphi} \in L^p([0, T_0], L^q(\mathbb{R}^3))$ si y solo si
$$\left(\int_0^{T_0} \|\vec{\varphi}(t,\cdot)\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{T_0} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\varphi}(t,x)|^q\right)^{\frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$
cuando $1 \leq p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$; y
$$\sup_{t\in[0,T_0]} \|\vec{\varphi}(t,\cdot)\|_{L^q} < +\infty,$$
cuando $p = +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$.
- Dados los parámetros $1 \leq p \leq +\infty$ y $s \in \mathbb{R}$ se tiene $\vec{\varphi} \in L^p([0, T_0], H^s(\mathbb{R}^3))$ si y solo si
$$\left(\int_0^{T_0} \|\vec{\varphi}(t,\cdot)\|_{H^s}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$
cuando $1 \leq p < +\infty$; y
$$\sup_{t\in[0,T_0]} \|\vec{\varphi}(t,\cdot)\|_{H^s} < +\infty,$$
cuando $p = +\infty$.

  Se tienen las mismas definiciones cuando en lugar de un espacio de Sobolev no homogéneo $H^s(\mathbb{R}^3)$ consideramos un espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ con $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 2 (Soluciones débiles) *Sea $T_0 > 0$ y sean los datos $\vec{f}$ y $\vec{u}_0$ tales que:*

- $\vec{f} \in L^2([0, T_0], H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ *y* $div(\vec{f}) = 0$,
- $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *y* $div(\vec{u}_0) = 0$.

Entonces existen dos funciones $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ y $p \in L^2([0, T_0], \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ tales que:

- *el par (u, p) es una solución* débil *de las ecuaciones de Navier-Stokes (1),*
- *la velocidad $\vec{u}$ verifica además la siguiente* desigualdad de energía: *para todo tiempo $t \in [0, T_0]$ se tiene:*

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2} + 2\int_0^t \langle \vec{f}(t,\cdot), \vec{u}(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}\times H^1} dt. \quad (4)$$

⇒ En este resultado observamos que a partir de los datos $(\vec{f}, \vec{u}_0)$, que no son regulares como en el Teorema 1 pues se tiene $\vec{f} \in L^2([0,T_0], H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ y $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, se puede construir una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, es decir, la solución $(\vec{u}, p)$ verifica estas ecuaciones pero en el sentido de las distribuciones y no en el sentido clásico como en el Teorema 1.

⇒ Es muy importante señalar que se obtienen soluciones débiles *globales en tiempo* sin ningún control suplementario sobre los datos $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ y esto se debe a la desigualdad de energía (4): a partir de esta desigualdad y usando la de desigualdad de Grönwall se tiene la siguiente estimación: para todo $t \in [0, T_0]$

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds \leq e^{T_0}\left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^{-1}} dt\right).$$

Observemos que la cantidad a la derecha de esta estimación no depende del tiempo t y esto induce un control *uniforme* de la cantidad a la izquierda: $\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds$, lo que *impide* que haya una explosión en tiempo finito de la norma de la velocidad $\vec{u}$ en el espacio $L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$ y en el espacio $L^2([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ para todo tiempo $0 < T \leq T_0$.

En efecto, para todo tiempo $0 < T \leq T_0$ podemos escribir

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2} \leq e^{T_0}\left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^{-1}} dt\right),$$

donde observamos que la norma $\|\vec{u}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))}$ está bien controlada.

De igual manera, para todo tiempo $0 < T \leq T_0$ podemos escribir

$$2\int_0^T \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} dt \leq e^{T_0}\left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^{-1}} dt\right),$$

y entonces la norma $\|\vec{u}\|_{L^2([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))}$ está bien controlada.

⇒ Toda solución de las ecuaciones de Navier-Stokes que pertenece al espacio $L^\infty([0,T_0], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ y que verifica la desigualdad de energía (4) es llamada *solución débil de Leray.*

⇒ El Teorema 2 no nos proporciona ninguna información adicional sobre la *unicidad* de las soluciones débiles de Leray y esta pregunta es hasta la actualidad un problema abierto para las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones.

⇒ El Teorema 2 tampoco nos proporciona ninguna información adicional sobre la *regularidad* de las soluciones débiles de Leray: dada la fuerza $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$ (que es un dato del problema) sabemos que la solución $\vec{u}$ asociada a esta fuerza verifica $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ y observamos que ganamos regularidad en variable espacial al pasar del espacio $L^2_t H^{-1}_x$ al espacio $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$. Pero si tomamos ahora una fuerza más regular, por ejemplo $\vec{f} \in L^2_t H^s_x$ con $s \geq 0$, entonces, en el marco general de las soluciones débiles de Leray y sin ninguna hipnosis suplementaria, *no sabemos mostrar* que estas soluciones verifican $\vec{u} \in L^\infty_t H^{s+1}_x \cap L^2_t \dot{H}^{s+2}_x$.

⇒ En este marco, el estudio de la regularidad de las soluciones débiles de Leray es un área activa de la investigación actual sobre las ecuaciones de Navier-Stokes.

3.3. Soluciones Mild (1964)

Empecemos por explicar rápidamente la idea de solución *mild*. Volvamos a las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma diferencial introducidas al inicio de esta lección en la formula (1).

⇒ La idea de base para construir soluciones *mild* de las ecuaciones de Navier-Stokes es que estas ecuaciones en forma pueden escribirse *de manera equivalente* como una formulación integral.

Para explicar más en detalle esta formulacion integral de las ecuaciones de Navier-Stokes necesitamos introducir dos herramientas de base: el proyector de Leray y la ecuación del calor.

El proyector de Leray

Recordemos que la velocidad $\vec{u}$ y la presión p (que son las incógnitas des las ecuaciones de Navier-Stokes) están relacionadas por la ecuación (3) y si se tiene la velocidad $\vec{u}$ entonces se tiene directamente la presión p usando esta ecuación. En este marco, para simplificar el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes, conviene *deshacerse* del término $\vec{\nabla} p$ y obtener así una ecuaciones *equivalentes* pero en donde intervenga unicamente la velocidad $\vec{u}$ como incógnita. Esto es posible gracias al proyector de Leray $\mathbb{P}$ que definimos a continuación:

Definición 1 (Proyector de Leray) *Sea $\vec{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. El proyector de Leray $\mathbb{P}$ se define como*

$$\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}(div(\vec{\varphi})), \tag{5}$$

donde el operador $\frac{1}{-\Delta}$ se define en variable de Fourier como $\widehat{\frac{1}{-\Delta}\phi}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}\widehat{\phi}(\xi)$, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Veamos ahora las principales propiedades del proyector $\mathbb{P}$ que se deducen directamente de la expresion (5):

1) Si $div(\vec{\varphi}) = 0$ entonces se tiene $\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi}$ y vemos de esta manera que el proyector de Leray *preserva* los campos vectoriales a divergencia nula.

2) Si $\vec{\varphi} = \vec{\nabla}\phi$, es decir la funcion vectorial $\vec{\varphi}$ está dada por el gradiente de una función ϕ, entonces por la expresión (5) podemos escribir

$$\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \mathbb{P}(\vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}(div(\vec{\nabla}\phi)) = \vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}(\Delta\phi) = \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\Delta}(\Delta\phi)\right) = \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\phi = 0.$$

Observamos así que se tiene $\mathbb{P}(\vec{\nabla}\phi) = 0$.

3) Para $\vec{\psi} = \vec{\psi}(t,x)$ una función suficientemente regular en variable temporal y espacial se tiene

$$\mathbb{P}\left(\partial_t\vec{\psi}\right) = \partial_t\left(\mathbb{P}(\vec{\psi})\right),$$

y además, para todo multi-indice $a \in \mathbb{N}^3$ se tiene

$$\mathbb{P}\left(\partial_x^a\vec{\psi}\right) = \partial_x^a\left(\mathbb{P}(\vec{\psi})\right).$$

4) Resulta a menudo muy útil escribir la acción del proyector de Leray sobre una función en variable de Fourier. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ se tiene:

$$\widehat{\mathbb{P}(\vec{\varphi})}(\xi) = \left(I_3 - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}\right)\widehat{\vec{\varphi}}(\xi), \tag{6}$$

donde I_3 denota la matriz identidad de dimensión 3×3. Observamos de esta manera que, en variable Fourier, la acción del proyector de Leray se escribe como la multiplicación por la matriz $I_3 - \dfrac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}$.

5) La expresión (6) nos permite deducir fácilmente que el proyector de Leray es un operador lineal y continuo en los espacios de Sobolev. En efecto, la linealidad del proyector $\mathbb{P}$ se deduce directamente de la formula (6) y de la linealidad de la transformación de Fourier. Veamos ahora que se trata además de un operador lineal y continuo en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ y $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Observemos que por la expresión (6) se tiene la estimación puntual

$$\left|\widehat{\mathbb{P}(\vec{\varphi})}(\xi)\right| = \left|\left(I_3 - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}\right)\widehat{\vec{\varphi}}(\xi)\right| \leq |\widehat{\vec{\varphi}(\xi)}| + \left|\frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}\widehat{\vec{\varphi}}(\xi)\right| \leq |\widehat{\vec{\varphi}(\xi)}| + |\widehat{\vec{\varphi}(\xi)}| \leq 2|\widehat{\vec{\varphi}(\xi)}|,$$

y entonces podemos escribir

$$\|\mathbb{P}(\vec{\varphi})\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s\left|\widehat{\mathbb{P}(\vec{\varphi})}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s(2|\widehat{\vec{\varphi}}(\xi))^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\|\vec{\varphi}\|_{H^s}.$$

Siguiendo estos mismas estimaciones se tiene $\|\mathbb{P}(\vec{\varphi})\|_{\dot{H}^s} \leq 2\|\vec{\varphi}\|_{\dot{H}^s}$.

6) Finalmente observemos que $\mathbb{P}$ es un operador *no local*: en la expresión (5) que define el operador $\mathbb{P}$ interviene el operador $\frac{1}{-\Delta}$ y este operador no local. En efecto, en variable de espacio este operador está dado por $\frac{1}{-\Delta}\phi(x) = c\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(y)}{|x-y|}dy$, y observamos que para calcular la función $\frac{1}{-\Delta}\phi$ en un punto $x \in \mathbb{R}^3$ necesitamos los valores de la función ϕ en todo punto $y \in \mathbb{R}^3$ y esto define el carácter no local del operador $\frac{1}{-\Delta}$.

Ahora, en las ecuaciones de Navier-Stokes (1), aplicando el proyector de Leray $\mathbb{P}$ a cada lado de esta identidad entonces se tiene (formalmente)

$$\mathbb{P}(\partial_t \vec{u}) = \mathbb{P}(\Delta \vec{u}) - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \mathbb{P}(\vec{\nabla} p) + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

y por las propiedades 1), 2) y 3) tenemos la siguiente ecuación de Navier-Stokes en donde la velocidad $\vec{u}$ es la única incógnita:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0, \quad \text{sobre }]0, T[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \quad div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Recordemos ahora que la ecuación del calor no homogénea de escribe como

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \vec{g}, \tag{8}$$

donde la función $\vec{g}$ denota una fuente de calor externa, y entonces podemos observar que la ecuación de Navier-Stokes (7) se trata de una ecuación que tiene la misma estructura que la ecuación del calor (8) cuando escribimos

$$\vec{g} = -\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \vec{f}.$$

De esta manera, dada la similitud entre las ecuaciones (7) y (8), para estudiar la existencia de soluciones de la ecuación (7) es entonces natural estudiar primero la estructura de las soluciones de la ecuación del calor (8).

La ecuación del calor

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3 (Ecuación del calor) . *Sea $T_0 > 0$. Sea $\vec{g} : [0, T_0] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $\vec{g} \in \mathcal{C}^1([0, T_0], \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))$ que además supondremos a soporte compacto en la variable espacial. Sea $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un dato inicial tal que $\vec{u}_0 \in \mathcal{C} \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Sea además el núcleo del calor h_t definido para todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^3$ por*

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \tag{9}$$

Entonces la función

$$\vec{u}(t, x) = h_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t h_{(t-s)} * \vec{g}(s, x) ds, \tag{10}$$

verifica $\vec{u} \in \mathcal{C}^1([0, T_0], \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))$ y es la única solución del problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \vec{g}, \quad \textit{sobre }]0, T_0[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

En este teorema prestaremos particular atención a la *estructura* que tiene la solución $\vec{u}(t, x)$ dada en la formulación integral (10).

Soluciones mild de las ecuaciones de Navier-Stokes

Recordemos que si en la ecuación del calor (8) escribimos el término $\vec{g}$ como $\vec{g} = -\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) + \vec{f}$ entonces obtenemos las ecuaciones de Navier-Stokes (7). Este hecho y la formula (10) *motiva* a buscar soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes de la forma

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t h_{(t-s)} * \left(-\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) + \vec{f}\right)(s,x)ds,$$

las cuales reescribimos como

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t h_{(t-s)} * \vec{f}(s,x)ds - \int_0^t h_{(t-s)} * \left(\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})\right)(s,x)ds. \tag{11}$$

En este formula observamos que la solución $\vec{u}$ se escribe (formalmente) como una solución de un problema de *punto fijo*. En efecto, si notamos

$$h_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t h_{(t-s)} * \vec{f}(s,x)ds = \vec{v}_0,$$

el termino que solo depende de los datos $\vec{u}_0$ y $\vec{f}$; y si notamos

$$\int_0^t h_{(t-s)} * \left(\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})\right)(s,x)ds = B(\vec{u},\vec{u}),$$

la forma *bilineal* que solo depende de la solución $\vec{u}$; entonces la solución $\vec{u}$ dada en la formula (11) se escribe como

$$\vec{u} = \vec{v}_0 - B(\vec{u},\vec{u}).$$

Esta formulación de la solución $\vec{u}$ como problema de punto fijo sugiere utilizar el siguiente resultado para construir tal solución:

Teorema 4 (Principio de contracción de Picard) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Sea $\vec{v}_0 \in E$ y $B: E\times E \longrightarrow E$ una forma bilineal y continua sobre E: existe una constante $C_B > 0$ tal que para todo $\vec{u},\vec{v} \in E$ se tiene $\|B(\vec{u},\vec{v})\|_E \leq C_B\|\vec{u}\|_E\|\vec{v}\|_E$.*

Si $\vec{v}_0 \in E$ verifica $\|\vec{v}_0\|_E \leq \delta$ con $0 < \delta < \dfrac{1}{4C_B}$, entonces existe $\vec{u} \in E$ solución del problema

$$\vec{u} = \vec{v}_0 - B(\vec{u},\vec{u}).$$

Además, la solución $\vec{u}$ es la única solución en la bola $\|\vec{u}\|_E \leq 2\delta$ y se tiene una dependencia continua con respecto al dato inicial: si $\vec{w}_0 \in E$ es otro dato que verifica $\|\vec{w}_0\|_E \leq \delta$ y si $\vec{w} \in E$, con $\|\vec{w}\|_E \leq 2\delta$, es la solución del problema $\vec{w} = \vec{w}_0 - B(\vec{w},\vec{w})$ entonces se tiene

$$\|\vec{u} - \vec{w}\|_E \leq \frac{1}{1-4C_B\delta}\|\vec{u}_0 - \vec{w}_0\|_E.$$

Tenemos ahora todas las herramientas para explicar la idea de solución mild de las ecuaciones de Navier-Stokes:

⇒ Llamamos solución mild $\vec{u}$ de las ecuaciones de Navier-Stokes (1) a toda solución dada por la formulación integral (11) que se obtiene mediante el principio de contracción de Picard, dado en el Teorema 4, en un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ adecuado que verifique las hipótesis del principio de contracción de Picard.

En el año 1964 los matemáticos japoneses *Hiroshi Fujita* y *Tosio Kato* publicaron el siguiente resultado sobre la existencia de soluciones mild se las ecuaciones de Navier-Stokes en los espacios de Sobolev.

Teorema 5 (Soluciones mild) *Sea $T_0 > 0$ y sean los datos $\vec{f}$ y $\vec{u}_0$ tales que:*

- $\vec{f} \in L^2([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3))$ *y* $div(\vec{f}) = 0$,
- $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *y* $div(\vec{u}_0) = 0$.

Existe un tiempo $0 < T_1 < T_0$ (suficientemente pequeño) y una función $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T_1], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_1], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ que es la unica *solución mild de la ecuaciones de Navier-Stokes (1):*

$$\vec{u}(t, x) = h_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t h_{(t-s)} * \vec{f}(s, x) ds - \int_0^t h_{(t-s)} * \left(\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})\right)(s, x) ds.$$

Si comparamos este resultado con la existencia de soluciones de Leray dada en el Teorema 2 tenemos las siguientes observaciones:

⇒ En el Teorema 5 necesitamos que los datos $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ sean más regulares (en variable espacial) que en el Teorema 2: ahora se tiene $\vec{f} \in L^2_t L^2_x$ en lugar de $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$; $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ en lugar de $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

⇒ Con esta información sobre los datos, $(\vec{f}, \vec{u}_0) \in L^2_t L^2_x \times H^1_x$, se tiene que la solución mild $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T_1], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_1], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ es más regular (en variable espacial) que la solución de Leray $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ dada en el Teorema 2.

⇒ En el marco del espacio de Banach $\mathcal{C}([0, T_1], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_1], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ se verifican todas la hipótesis del principio de contracción de Picard y la solución mil es construida por este principio de contracción, mientras que en el marco del espacio de Banach $L^\infty([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ (donde se construyen las soluciones de Leray), en el estado actual de nuestros conocimientos, *no sabemos* verificar si la forma bilineal: $B(\vec{u}, \vec{u}) = \displaystyle\int_0^t h_{(t-s)} * \left(\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})\right)(s, x) ds$, es continua en este espacio y entonces *no podemos* aplicar directamente aquí el principio de contracción de Picard.

⇒ En otras palabras, las soluciones de Leray no se obtienen directamente por medio del principio de contracción de Picard, sino como el límite de una familia de funciones que son soluciones de ecuaciones de Navier-Stokes *aproximadas*.

⇒ El hecho de que las soluciones de Leray se obtengan como el limite de soluciones aproximadas hace que perdamos información sobre la unicidad de las soluciones de Leray, mientras que la solución mild dada en el Teorema 5 es única.

⇒ Al contrario de las soluciones de Leray dadas en el Teorema 2, la solución mild obtenida en el Teorema 5 es *local en tiempo* y se tiene la siguiente dicotomía:

- Dado el tiempo $T_0 > 0$ existe una solución mild $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T_1], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_1], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ pero en un tiempo muy pequeño $0 < T_1 < T_0$.

- Si queremos construir una solución mild definida para todo tiempo $t \in [0, T_0[$ (es decir una solución *global en tiempo*) entonces, en el estado actual de nuestros conocimientos, necesitamos que los datos del problema $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ sea pequeños:

$$\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon_0 \quad \text{y} \quad \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t, \cdot)\|^2_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}} dt < \varepsilon_0^2,$$

  donde $\varepsilon_0 > 0$ es una constante *suficientemente* pequeña.

El problema de existencia *global en tiempo* de la solución mild y sin ningún control suplementario sobre los datos $(\vec{f}, \vec{u}_0)$ es hasta la actualidad un problema abierto. En este marco, se tiene algunos resultados *parciales* muy interesantes conocidos como *criterios de explosión*: la idea es *suponer* que la solución mild $\vec{u}$ explota en un tiempo finito $0 < T^* < T_0$, es decir *suponemos* que la solución $\vec{u}$ *no es global en tiempo* y que solo existe hasta el tiempo maximal T^*, y se estudia entonces de qué manera explota la solución $\vec{u}(t, \cdot)$ cuando $t \longrightarrow T^*$.

Teorema 6 (Criterios de explosión para las soluciones mild) *Sea $T_0 > 0$ y sean los datos $\vec{f}$ y $\vec{u}_0$ como en el Teorema 5. Sea $0 < T^* \leq T_0$ el tiempo* maximal *de existencia de la solución mild: para todo tiempo $0 < T < T^*$ la función $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ es una solución mild de las ecuaciones de Navier-Stokes. Si $T^* < T_0$ entonces:*

1) $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow T^*} \|\vec{u}(T, \cdot)\|_{\dot{H}^1} = +\infty$, *y*

2) $\displaystyle\int_0^{T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|^2_{\dot{H}^2} dt = +\infty.$

Expliquemos rápidamente este resultado. Sabemos que $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ entonces se tiene en particular $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$. Además se tiene

$$\|\vec{u}(T, \cdot)\|_{H^1} = \|\vec{u}(T,)\|_{L^2} + \|\vec{u}(T, \cdot)\|_{\dot{H}^1}.$$

Se puede mostrar que el primer término de la norma $\|\vec{u}(T, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ está controlado por los datos iniciales:

$$\|\vec{u}(T, \cdot)\|^2_{L^2} \leq e^{T_0} \left(\|\vec{u}_0\|^2_{H^1} + \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t, \cdot)\|^2_{L^2} dt \right), \tag{12}$$

y entonces el punto 1) del Teorema 6 nos dice que si $T^* < T_0$ entonces la solución *explota* en el tiempo T^* en el sentido que el segundo termino de la norma $\|\vec{u}(T, \cdot)\|_{H^1}$: $\|\vec{u}(T, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$, explota cuando T tiende a T^*.

Estudiemos ahora el punto 2) del Teorema 6. Sabemos que para todo $0 < T < T^*$ se tiene $\vec{u} \in L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ y el punto 2) del Teorema 6 nos dice que si $T^* < T_0$ entonces la solución mild $\vec{u}$ ya no pertenece al espacio $L^2([0,T^*], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

Supongamos que $T^* < T_0$. Este criterio de explosión reposa en la siguiente estimación: para todo $0 < T < T^*$

$$\|\vec{u}(T, \cdot)\|^2_{\dot{H}^1} \leq c \left(\|\vec{u}_0\|^2_{H^1} + \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t, \cdot)\|^2_{L^2} dt \right) e^{\left(\int_0^T \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2} dt\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{13}$$

donde nos concentramos en el exponente del termino exponencial a la derecha:

$$\left(\int_0^{T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|^2_{\dot{H}^1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|^2_{\dot{H}^2} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se puede mostrar que el primer término de esta cantidad está siempre controlado por los datos del problema:

$$\int_0^{T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|^2_{\dot{H}^1} dt \leq e^{T_0} \left(\|\vec{u}_0\|^2_{H^1} + \int_0^{T_0} \|\vec{f}(t, \cdot)\|^2_{L^2} dt \right), \tag{14}$$

y vemos entonces que si $\displaystyle\int_0^{T^*} \|\vec{u}(t, \cdot)\|^2_{\dot{H}^2} dt < +\infty$ se tiene una contradicción. En efecto, si suponemos que esta cantidad está bien definida entonces por las estimaciones (13) y (14) se tiene que la cantidad $\|\vec{u}(T,)\|^2_{\dot{H}^1}$ está bien controlada para todo tiempo $0 < T < T^*$ lo que contradice el punto 1) del Teorema 6.

Para finalizar este corto estudio de las soluciones mild de las ecuaciones de Navier-Stokes se tiene la siguiente observación: dados los datos $(\vec{f},\vec{u}_0)\in L^2_tL^2_x\times H^1_x$ por las estimaciones (12) y (13) podemos observar que la solución mild $\vec{u}\in\mathcal{C}_tH^1_x\cap L^2_t\dot{H}^2_x$ asociada a estos datos pertenece también al espacio $L^\infty_tL^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x$ que es el espacio funcional donde se construyen las soluciones de Leray. Esta observación sugiere *comparar* las soluciones de Leray que notaremos por $\vec{u}_L$ con las soluciones mild que notaremos por $\vec{u}_M$ y se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7 (Unicidad fuerte-débil) *Sea $T_0>0$ y sean los datos $\vec{f}$ y $\vec{u}_0$ como en el Teorema 5.*

- *description Sea $\vec{u}_L\in L^\infty([0,T_0],L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T_0],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ una solución de Leray de las ecuaciones de Navier-Stokes asociada a los datos $(\vec{f},\vec{u}_0)$ y dada por el Teorema 2.*
- *Sea el tiempo $0<T_1<T_0$ y sea $\vec{u}_M\in\mathcal{C}([0,T_1],H^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T_1],\dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ la solución mild de las ecuaciones de Navier-Stokes asociada a los datos $(\vec{f},\vec{u}_0)$ y dada por el Teorema 5.*

Entonces se tiene la identidad $\vec{u}_L=\vec{u}_M$ sobre $[0,T_1]\times\mathbb{R}^3$.

Observamos de esta manera que si consideramos los datos suficientemente regulares $(\vec{f},\vec{u}_0)\in L^2_tL^2_x\times H^1_x$ de donde se tiene $(\vec{f},\vec{u}_0)\in L^2_tH^{-1}_x\times L^2_x$, entonces la solución de Leray (solución débil) asociada a estos datos *coincide* con la solución mild (solucion fuerte), asociada a estos mismos datos, en el tiempo en que esta solución existe.

⇒ Es importante insistir en el hecho que se tiene este resultado de unicidad bajo la hipótesis sobre los datos $(\vec{f},\vec{u}_0)\in L^2_tL^2_x\times H^1_x$. Si consideramos datos menos regulares $(\vec{f},\vec{u}_0)\in L^2_tH^{-1}_x\times L^2_x$ entonces por el Teorema 2 podemos asegurar la existencia de soluciones de Leray $\vec{u}_L$ pero no podemos asegurar la existencia de una solucion $\vec{u}_M$ asociada a estos datos.

⇒ En el caso de los datos $(\vec{f},\vec{u}_0)\in L^2_tL^2_x\times H^1_x$ es interesante observar que por el Teorema 7 se sabe que hasta el tiempo $T_1>0$ la solución $\vec{u}$ de las ecuaciones de Navier-Stokes es única y regular en el sentido que pertenece al espacio $\mathcal{C}([0,T_1],H^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T_1],\dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ pues se tiene $\vec{u}=\vec{u}_M$.

⇒ Luego, a partir del tiempo $T_1>0$, hay una *pérdida de información sobre la unicidad y la regularidad de la solución* pues para todo $t\in[T_1,T_0[$ se tiene $\vec{u}=\vec{u}_L\in L^\infty([[T_1,T_0[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2([T_1,T_0[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.