Aplicaciones, conjuntos cociente y operaciones 19/07/2011

Ejercicio 1 — Aplicaciones de un conjunto finito

Sea E un conjunto finito, y $f : E \longrightarrow E$ una aplicación. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

i) f es inyectiva,

ii) f es biyectiva,

iii) f es sobreyectiva.

* Ejercicio 2 — Descomposición canónica de aplicaciones

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. En A se define la relación $\sim$ mediante $x \sim y$ si y solo si es que $f(x) = f(y)$.

1. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

2. Sea $A/_\sim$ el conjunto cociente, y $p : A \twoheadrightarrow A/_\sim$ la proyección canónica, y $j : \mathsf{Im}(f) \hookrightarrow B$ la inclusión. Demuestre que existe una a única aplicación biyectiva $\tilde{f} : A/_\sim \longrightarrow \mathsf{Im}(f)$ tal que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p"'] & B \\ A/_\sim \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathsf{Im}(f) \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

* Ejercicio 3 — Espacios proyectivos

En el conjunto $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ se define la relación $\sim$ mediante $u \sim v$ si y solamente si es que existe $\lambda \in \mathbb{R}_*$ tal que $u = \lambda v$.

1. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

2. Describa la clase de equivalencia de un vector no nulo v de $\mathbb{R}^n$. El conjunto cociente $\mathbb{R}^n_*/_\sim$ es el *espacio proyectivo* de dimensión $n-1$, denotado mediante $\mathbb{RP}^n$. En el caso $n = 1$ hablamos de la *recta proyectiva*, $\mathbb{RP}^1$ y en el caso $n = 2$, del *plano proyectivo*, $\mathbb{RP}^2$.

3. En el caso $n = 1$, establezca una biyección entre $\mathbb{RP}^1$, y $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es por esta razón que a menudo se dice que la recta proyectiva es una recta normal, más un *punto al infinito*.

4. Para el caso $n = 2$, establezca una biyección entre $\mathbb{RP}^2$ y el conjunto $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{RP}^1$. Esto muestra que el plano proyectivo es un plano afín, más una recta (proyectiva) *al infinito*.

Ejercicio 4 — Imágenes y preimágenes

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Para una parte $Y_1 \subseteq Y$, la preimagen de Y_1 por f es el conjunto $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X | f(x) \in Y_1\}$

1. Demuestre que para $Y_1 \subseteq Y$ se tiene que $f\left(f^{-1}(Y_1)\right) \subseteq Y_1$, y de un ejemplo en el que esta inclusión sea estricta. De una condición necesaria y suficiente para que se tenga la igualdad.

2. Demuestre que para $X_1 \subseteq X$ se tiene que $f^{-1}\left(f(X_1)\right) \supseteq X_1$. y de un ejemplo en el que esta inclusión sea estricta. De una condición necesaria y suficiente para que se tenga la igualdad.

Ejercicio 5 — Propiedades de operaciones

Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ se define $f \top g$ mediante la fórmula

$$(f \top g)(x) = \frac{(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x)}{2}$$

Demuestre les siguientes enunciados

1. La operación $\top$ es conmutativa, y posee une elemento neutro que se deberá especificar.
2. Toda biyección de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es inversible para la operación $\top$.
3. La operación $\top$ no es asociativa.
4. Para todos $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ se tiene que $(f \top g) \top f = f \top (g \top f)$.

Ejercicio 6 — Operaciones

En $\mathbb{Q}$ se define la operación $\Diamond$ mediante la fórmula $x \Diamond y = x + y - xy$.

1. Demuestre que la operación $\Diamond$ es conmutativa y asociativa.
2. Demuestre que $\mathbb{Q}$ posee un elemento neutro para la operación $\Diamond$.
3. Determine qué elementos de $\mathbb{Q}$ son inversibles para $\Diamond$, y determine sus inversos.