Turbulencia en las ecuaciones de Navier-Stokes

Oscar Jarrín (oscar.jarrin@univ-evry.fr)

bajo la dirección de Diego Chamorro y Pierre Gilles Lemarié-Rieusset,

Laboratoire de mathématiques et modélisation d'Évry, Évry-Francia, Asociación AMARUN

Resumen

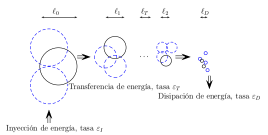
- La teoría de la turbulencia desarrollada por A.N. Kolmogorov en 1941 (Teoría K41) describe el comportamiento de un fluido en estado turbulento mediante una caracterización de la tasa de disipación de energía cinética y del espectro de energía de dicho fluido.
- Las leyes simples y universales que esta teoría propone para la descripción de la turbulencia fueron tratadas desde el punto de vista estadístico y están basadas en hipótesis las cuales no son totalmente comprendidas hasta la actualidad.
- En este marco una parte activa de la investigación actual consiste en desarrollar modelos teóricos de la mecánica de fluidos que nos permitan estudiar de manera rigurosa las leyes enunciadas en la Teoría K41 y en donde el modelo de base está dado por las ecuaciones de Navier-Stokes. El nuevo modelo determinista que se expone en este póster es parte del trabajo en mi tesis doctoral.

1 Introducción

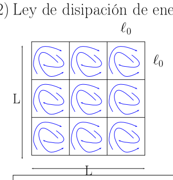
¿Por qué estudiar la turbulencia? El estudio de los fluidos en estado turbulento es uno de los problemas más intrigantes y al mismo tiempo más frustrantes de la física clásica. La importancia del estudio de la turbulencia radica en el hecho que la mayoría de los fluidos son turbulentos, el agua o el aire por ejemplo, y sin embargo actualmente no hemos podido responder a la pregunta ¿qué es la turbulencia, cómo y cuándo se origina?
Nos concentraremos en dos resultados de la Teoría K41 :

(1) El modelo de casada de energía.

En este modelo, ℓ_0 es la escala de longitud a la que se introduce la energía cinética en el fluido. ℓ_T es llamada la escala de Taylor y caracteriza las escalas de longitud donde la energía se transfiere dentro del fluido. ℓ_D es la escala a partir de la cual la energía se disipa fuera del fluido.



(2) Ley de disipación de energía.



Imaginemos el siguiente experimento, consideremos un cubo $[0, L]^3$ lleno de un fluido viscoso e incompresible. Dicho fluido, el cual se encontraba en un estado de reposo, es ahora agitado por la acción de una fuerza exterior f la cual actúa a la escala de longitud $\ell_0 \leq L$ y de manera independiente del tiempo. A partir de un tiempo suficientemente grande este fluido se encuentra en un estado turbulento permanente.

> La ley de disipación de energía nos dice que, para U la velocidad promedio del fluido y $L > 0$ llamada la longitud característica del fluido, en estado turbulento
> $$\varepsilon_I = \varepsilon_T = \varepsilon_D := \varepsilon \approx \frac{U^3}{L}.$$

El modelo determinista El modelo determinista de base, en donde estudiaremos la ley de disipación de energía, está dado por las ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio $\mathbb{R}^3$ entero, incompresibles y bajo la acción de una fuerza exterior $f \in L^2$ estacionaria y a divergencia nula.

$$\begin{cases} \partial_t u = \nu\Delta u - u\cdot\nabla u - \nabla p + f, \text{ sobre } \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ div(u) = 0, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

> $\Rightarrow$ En 1934 Jean Leray muestra la existencia de $u(t,x)$ (campo de velocidad del fluido) solución débil de la ecuación (1) donde el dato inicial $u_0 \in L^2$ es a divergencia nula ($div(u_0) = 0$).

> **Observación 1** *En este modelo artificial de la mecánica de fluidos, donde el fluido se encuentra en todo el espacio $\mathbb{R}^3$, una definición adecuada de la longitud característica $L > 0$ es un problema delicado.*

2 El modelo determinista de P. Constantin

Para f y $\ell_0 > 0$ dados: suponemos que $supp\,\widehat{f} \subset B\left(0, \frac{1}{\ell_0}\right)$ (la fuerza actúa a la escala ℓ_0) y siguiendo [1] definimos las cantidades físicas del modelo determinista:

(1) Longitud característica: notando por $F = \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$ la fuerza promedio se define $L = \frac{F}{\|\nabla\otimes f\|_{L^\infty}}$.

(2) Velocidad promedio del fluido: $U = \limsup\limits_{T\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2\frac{dt}{\ell_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(3) Tasa promedio de disipación de energía: $\varepsilon = \nu \limsup\limits_{T\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla\otimes u(t)\|_{L^2}^2\frac{dt}{\ell_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(4) Los números de Reynolds: caracterizan de manera teórica el estado turbulento de un fluido, $Re = \frac{UL}{\nu}$.

> ¿Qué se quiere mostrar? queremos encontrar $c_{1,2} :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ funciones y $C_1, C_2 > 0$ constantes todas independientes de f, U y ε tales que
> $$c_1(Re)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} \leq c_2(Re)\varepsilon \quad \text{y} \tag{2}$$
> $$\limsup_{Re\to+\infty} c_i(Re) = C_i, \quad \text{para} \quad i = 1,2. \tag{3}$$

> **Teorema 1** *(Constantin, 2003) Sea $u(t,x)$ una solución de Leray del sistema de Navier-Stokes (1) asociada a la fuerza exterior f. Entonces*
> $$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} + \frac{1}{\sqrt{Re}}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{U^3}{L}}.$$

$\Rightarrow$ Se trata de un resultado parcial de la ley de disipación de energía donde ¡la otra desigualdad de (2) es un problema abierto!

Dos errores en este modelo

- La longitud característica de Constantin $L = \frac{F}{\|\nabla\otimes f\|_{L^\infty}}$: en la demostración del Teorema 1 necesitamos la desigualdad
$$\|\nabla\otimes f\|_{L^2} \leq c\ell_0^{-\frac{3}{2}}\|\nabla\otimes f\|_{L^\infty}$$
la cual no se verifica de manera general.
- La velocidad promedio del fluido U : por la desigualdad de energía se tiene solamente el control
$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{t}{2\nu}\|f\|_{\dot{H}^{-1}}^2 \quad \text{y no podemos asegurar que } U < +\infty.$$

3 Ecuaciones de Navier-Stokes modificadas

Para $\alpha > 0$ y $0 < k_2 \leq \frac{1}{20\ell_0}$ definimos $\widehat{\alpha P_2 u}(\xi) = \alpha\,1_{|\xi|<k_2}\widehat{u}(\xi)$.

$$\begin{cases} \partial_t u = \nu\Delta u - u\cdot\nabla u - \nabla p + f - \alpha P_2 u, \quad div(u) = 0, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

> **Teorema 2** *(Chamorro, Jarrín, Lemarié, 2015) Si la fuerza exterior es tal que $supp\,\widehat{f} \subset \mathcal{C}\left(0, \frac{1}{10\ell_0}, \frac{1}{\ell_0}\right)$ para todo $\alpha > 0$ se tiene que:*
>
> *(i) existe $u_\alpha \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solución débil de (4) tal que*
> $$\|u_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-\frac{\beta}{2}t} + \frac{4}{\beta}\|f\|_{L^2}^2(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}) \quad \text{y entonces} \quad U_\alpha < +\infty.$$
>
> *(ii) Además, existe una constante $C_0 > 0$ independiente $\alpha P_2 u_\alpha$ y f tal que*
> $$\varepsilon_\alpha \leq C_0\frac{U_\alpha{}^3}{\ell_0} + \frac{C_0}{\sqrt{Re_\alpha}}\sqrt{\varepsilon_\alpha}\sqrt{\frac{U_\alpha{}^3}{\ell_0}} \quad \text{y entonces} \quad \limsup_{Re_\alpha\to+\infty}\varepsilon_\alpha \leq C_0\frac{U_\alpha{}^3}{\ell_0}.$$

$\Rightarrow$ Para estudiar la otra desigualdad de (2), $\frac{U^3}{L} \leq \varepsilon$, definimos a continuación una nueva longitud característica $L_1 > 0$.

4 La ley de disipación en las ecuaciones N-S modificadas

Dada f la fuerza exterior introducimos en nuestro modelo las siguientes cantidades:

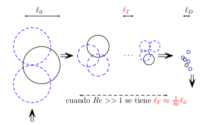
- $\gamma := \frac{\|f\|_{L^\infty}}{c_0 F}$ y para $\ell_0 > 0$ definimos
$$L_1 = \frac{\ell_0}{\gamma}.$$
Por las desigualdades de Bernstein se muestra que $0 < \gamma \leq 1$ por lo que $\ell_0 \leq L_1$ y además $L_1 \approx L$.
- $G_0 := \frac{\|f\|_{L^\infty}\ell_0^3}{\nu^2}$ es un numero adimensional y fijo.

> **Teorema 3** *(Chamorro, Jarrín, Lemarié, 2015) Tomando $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ notaremos por $u(t,x)$ la solución débil de (4). Si $Re \geq \frac{2G_0}{c_0\gamma^2}$ existen $C_1(G_0), C_2(G_0) > 0$ constantes que dependen únicamente de G_0 tales que*
> $$C_1(G_0)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L_1} \leq C_2(G_0)\varepsilon.$$

Un fluido no turbulento.

- El término $-\alpha P_2 u$ nos permite asegurar que $U < +\infty$ y tomando el parámetro $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ mostramos en el teorema anterior que $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L_1}$.
- Sin embargo, el mismo término $-\alpha P_2 u$ nos proporciona la siguiente estimación de la escala de Taylor $\ell_T := \left(\frac{\nu U^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ con respecto a la escala inicial ℓ_0 : $\ell_T \approx C_3(G_0)\ell_0$

Según la Teoría K41 el fluido descrito por las ecuaciones (4) no es turbulento. Cuando $Re >> 1$ se tiene que $\ell_T \approx \frac{1}{Re}\ell_0 << \ell_0$.



> Ejemplo: consideremos la fuerza particular f_A: para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ una ondelette de Meyer, $A \subset \mathbb{Z}^3$ tal que $N_A := Card(A) < +\infty$ definimos
> $$f_A(x) = \nu^2\sum_{k\in A}(-\partial_2\psi(x-k), \partial_1\psi(x-k), 0),$$
> donde: $Re \approx N_A$ pero $\ell_T \approx \ell_0$.

5 Trabajo en curso

Nos interesamos en las soluciones estacionarias $U(x)$ de las ecuaciones N-S modificadas

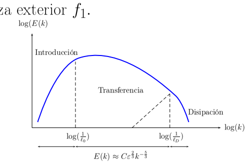
$$\begin{cases} \nu\Delta U = -U\cdot\nabla U - \nabla P + f_1 - \alpha U, \text{ sobre } \mathbb{R}^3, \\ div(u) = 0, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ donde estudiamos los casos $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$ con una nueva fuerza exterior f_1.

Para $U(x)$ una solución estacionaria se quiere estudiar su espectro de energía,

$$E(k) := \int_{|\xi|=k}|\widehat{U}(\xi)|^2 ds(\xi)$$

según la ley $-\frac{5}{3}$ de la Teoría K41: para $\frac{1}{\ell_0} << k << \frac{1}{\ell_D}$, se tiene que $E(k) \approx C\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}$.



Referencias

[1] P. Constantin. Euler equations Navier-Stokes equations and turbulence, 2004.
[2] C Doering et C. Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence, 2002.
[3] P.G. Lemarié-Rieusset. The Navier-Stokes Problem in the 21st Century, 2016.