Régularité partielle des équations de Navier-Stokes

Kawther Mayoufi

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

sous la direction de **Diego CHAMORRO et Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET**

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

II ConMatE-P

15 Avril 2016

Régularité partielle des équations de Navier-Stokes

Kawther Mayoufi

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

sous la direction de **Diego CHAMORRO et Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET**

LaMME Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

II ConMatE-P

15 Avril 2016

Équations de Navier-Stokes

On considère les équations de Navier-Stokes en dimension 3:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ div(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

où $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$

Équations de Navier-Stokes

On considère les équations de Navier-Stokes en dimension 3:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ div(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

où $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$

Il existe une solution faible $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$

Équations de Navier-Stokes

On a deux théories de la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes:

- La théorie de **Serrin**
- La théorie de **Caffarelli-Kohn et Nirenberg**

Critère de Serrin

Théorème (Serrin '62)

Soit Q un domaine borné de la forme $]a,b[\times B(x_0,r)$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes,

on suppose

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 H_x^1(Q)$
- $\vec{f} \in L_t^2 H_x^k(Q)$ *avec* $k \in \mathbb{N}$
- $p \in \mathcal{D}'(Q)$

Si de plus $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)$, *alors* $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^{k+1}(\tilde{Q}) \cap L_t^2 H_x^{k+2}(\tilde{Q})$

La vorticité

La vorticité $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$$

comme on a

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p \equiv 0}$$

les équations de Navier-Stokes deviennent:

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

Remarques

- La pression p est très générale.
- La régularité de $\vec{u}$ est liée à celle de la force $\vec{f}$.
- Il n'est pas possible d'obtenir des informations sur la régularité **en variable de temps** vu qu'on n'a pas de contrôle sur la pression p: **contre exemple de Serrin**.
- L'hypothèse $\vec{u} \in L_t^{\infty} L_x^{\infty}(Q)$ est **très forte**.

Théorème de O'Leary

Théorème (O'Leary '03)

Soit Q un domaine borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes telle que

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q),\ p \in \mathcal{D}'(Q) \text{ et } \vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q).$$

Si de plus on a $1_{\mathcal{V}}\vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, pour certain $\tau > 5$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage du point (t_0, x_0), alors $\vec{u}$ est une fonction **localement bornée**.

Espace de Morrey parabolique

Espace homogène:

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- $\delta((t,x),(s,y)) = |t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|$
- $d\mu = dt\, dx$
- $Q = 5$

Espace de Morrey parabolique

Espace homogène:

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- $\delta((t,x),(s,y)) = |t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|$
- $d\mu = dt\,dx$
- $Q = 5$

$$f \in \mathcal{M}_2^{q,\tau} \Leftrightarrow \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \sup_{r>0} \frac{1}{r^{5(1-\frac{q}{\tau})}} \int_{\delta(t-s,x-y)<r} |f(s,y)|^q \, ds\, dy < +\infty$$

$$\mathcal{M}_2^{q,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = L^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$$

Les espaces de Morrey paraboliques sont considérés comme une généralisation des espaces de Lebesgue.

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q.

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q. On suppose que:

- $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$
- $p(t,x) \in L^{q_0}_t L^1_x(Q) \quad q_0 > 1$
- $div\ f = 0 \quad et\ \vec{f}(t,x) \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(Q)$
- $1_Q \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7,\tau} \qquad avec\ \tau > 5/2$
- *$\vec{u}$ est adaptée*

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q. On suppose que:

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$
- $p(t,x) \in L_t^{q_0} L_x^1(Q) \quad q_0 > 1$
- $div\ f = 0 \quad et\ \vec{f}(t,x) \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(Q)$
- $1_Q \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7,\tau} \qquad avec\ \tau > 5/2$
- *$\vec{u}$ est adaptée*

$$\mu = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |u|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\mathrm{div}\,(p\vec{u}) + 2\vec{f} \cdot \vec{u}$$

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q. On suppose que:

- $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$
- $p(t,x) \in L^{q_0}_t L^1_x(Q) \quad q_0 > 1$
- $div\ f = 0 \quad et\ \vec{f}(t,x) \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x (Q)$
- $1_Q \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7,\tau} \qquad avec\ \tau > 5/2$
- *$\vec{u}$ est adaptée*

$$\mu = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |u|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\mathrm{div}\,(p\vec{u}) + 2\vec{f} \cdot \vec{u} \geq 0$$

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

- $\exists\ \epsilon^* > 0$ *t.q si en un point* $(t_0, x_0) \in Q$ *on a:*

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r} \int \int_{(t_0 - r^2, t_0 + r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds\, dx < \epsilon^*$$

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

- $\exists\ \epsilon^* > 0$ *t.q si en un point* $(t_0, x_0) \in Q$ *on a:*

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r} \int\int_{(t_0 - r^2, t_0 + r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds\, dx < \epsilon^*$$

Alors $\vec{u}$ est Hölderienne en **temps** et en **espace** dans un voisinage (t_0, x_0).

Remarques

- On n'a pas besoin de l'hypothèse $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q)$, on l'a remplacée par la notion **d'adaptabilité et la condition de petitesse de gradient**.
- On a des conditions sur la pression p.
- Le contrôle sur la pression p nous permet d'obtenir de la régularité en variable de temps.
- I. Kukavica (2008) a généralisé la théorie de CKN en utilisant les espaces de Morrey paraboliques.

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Comme on va s'intéresser à la pression p, on va rappeler l'évolution de son histoire:

- CKN 1982 $\quad p(t,x) \in L_t^{5/4} L_x^{5/4}(Q)$
- F. Lin 1998 $\quad p(t,x) \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}(Q)$
- A. Vasseur 2007 $\quad p(t,x) \in L_t^{q_0} L_x^{1}(Q) \quad q_0 > 1$

Objectif

- **Objectif**: **affaiblir** les conditions sur la **pression** tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli,Kohn et Nirenberg.

Objectif

- **Objectif**: **affaiblir** les conditions sur la **pression** tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli,Kohn et Nirenberg.
- **Problème**: la notion d'adaptabilité n'a plus de sens.

$$\mathrm{div}\,(p\vec{u})$$

Objectif

- **Objectif**: **affaiblir** les conditions sur la **pression** tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli,Kohn et Nirenberg.
- **Problème**: la notion d'adaptabilité n'a plus de sens.

$$\mathrm{div}\,(p\vec{u})$$

- **Idée**: généraliser la notion d'adaptabilité.

Dissipativité

Définition: solution dissipative

- On suppose $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$ avec $Q =]a, b[\times B(x_0, r)$ et $\mathrm{div}\,(\vec{f}) = 0$,
- $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t H^1_x(Q)$,
- $p \in \mathcal{D}'(Q)$.

Dissipativité

Définition: solution dissipative

- On suppose $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q)$ avec $Q =]a, b[\times B(x_0, r)$ et $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$,
- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 H_x^1(Q)$,
- $p \in \mathcal{D}'(Q)$.

$\vec{u}$ est une solution **dissipative** si la distribution M donnée par l'expression

$$M = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\langle \operatorname{div}(p\vec{u}) \rangle + 2\vec{f} \cdot \vec{u} \geq 0$$

où $\langle \operatorname{div}(p\vec{u}) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{div} \left[(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}) \times (\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}) \right]$

Théorème principal

Théorème (Chamorro-Lemarié-Mayoufi '16)

Soit $Q =]a, b[\times B(x, \rho)$ *un domaine borné de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *et soit* $(\vec{u}, p)$ *solution faible des équations de Navier-Stokes sur* Q.
On suppose que:

- $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ *et* $p \in \mathcal{D}'(Q)$,
- $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$,
- $\vec{u}$ *est dissipative.*

Il existe une constante $\epsilon^* > 0$, *qui dépend que de* ν, *telle que, si pour certains points* $(t_0, x_0) \in Q$ *on a l'inégalité*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r} \int\int_{]t_0 - r^2, t_0 + r^2[\times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, x)|^2 dt\, dx < \epsilon^*,$$

alors la solution $\vec{u}$ *est* **bornée** *au voisinage de* (t_0, x_0).

Remarques

- $p \in \mathcal{D}'$: dû au contre exemple de Serrin on a aucune information sur la régularité de $\vec{u}$ en variable de tepms.
- Par rapport à Serrin on exige moins d'hypothèses sur $\vec{u}$.
- Comme la notion de dissipativité **est plus générale** que celle de l'adaptabilité, notre méthode est une généralisation du théorème de CKN.

$\Longrightarrow$ Notre Théorème se situe entre les deux théories (Serrin et CKN)

Idée de la preuve

Soit:

$$Q = I \times B(x_0, r)$$

On applique le rotationnel aux équations de Navier-Stokes:

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

avec $\vec{\omega} \in L_t^{\infty} H_x^{-1} \cap L_t^2 L_x^2$

Idée de la preuve

Soit:

$$Q = I \times B(x_0, r)$$

On applique le rotationnel aux équations de Navier-Stokes:

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

avec $\vec{\omega} \in L_t^{\infty} H_x^{-1} \cap L_t^2 L_x^2$

On considère

$$\boxed{\vec{v} = -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{u})}$$

où $\psi(t, x) = \phi(t)\Phi(x)$ avec $supp\psi \subset Q$

Idée de la preuve

Proposition

Sous les hypothèses $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q)$ *sur la solution* $\vec{u}$ *des équations de Navier-Stokes, la fonction* $\vec{v}$ *satisfait les points suivants*

1) $\mathrm{div}\,(\vec{v}) = 0$,

2) $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(Q_0) \cap L_t^2 H_x^1(Q_0)$.

Idée de la preuve

Proposition

Sous les hypothèses $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$, $p \in \mathcal{D}'(Q)$ *et* $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$, *la fonction* $\vec{v}$ *satisfait les équations de Navier-Stokes suivantes sur* Q_0

$$\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F},$$

avec les propriétés suivantes

1) *la pression* q *est une fonction telle que* $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(Q_0)$,

2) *la force* $\vec{F}$ *est telle que* $\mathrm{div}\,(\vec{F}) = 0$ *et* $\vec{F} \in L^2_t L^2_x(Q_0)$.

Idée de la preuve

Proposition

1) *Si $\vec{u}$ est* **dissipative** *alors $\vec{v}$ est* **adaptée** *au sens de CKN.*

2) *Si $\vec{u}$ vérifie la condition de petitesse de gradient alors $\vec{v}$ la vérifie aussi.*

Idée de la preuve

La solution $\vec{u}$	La nouvelle variable $\vec{v}$
1) $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$	1) $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$
2) $\vec{u}$ vérifie les équations de Navier Stokes $$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}$$	2) $\vec{v}$ vérifie les équations de Navier Stokes $$\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F}$$
3) $p \in \mathcal{D}'$	3) $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x$
4) $\vec{f} \in L^2_t H^1_x, \quad \mathrm{div}\, \vec{f} = 0$	4) $\vec{F} \in L^2_t L^2_x, \quad \mathrm{div}\, \vec{F} = 0$
5) $\vec{u}$ est dissipative	5) $\vec{v}$ est adaptée
6) $\vec{u}$ vérifie la condition de petitesse	6) $\vec{v}$ vérifie la condition de petitesse

Idée de la preuve

On peut appliquer le théorème de Kukavika: Il existe $\tau_1 > 5$ tel que

$$1_Q\, \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$$

Idée de la preuve

On peut appliquer le théorème de Kukavika: Il existe $\tau_1 > 5$ tel que

$$1_Q\, \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$$

On peut démontrer que:

Proposition (retour vers $\vec{u}$)

Si $1_Q \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ *alors* $1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$

Idée de la preuve

1. $\vec{u}$ appartient à $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1(Q)$
2. $p \in \mathcal{D}'(Q)$
3. $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ et $\operatorname{div} \vec{f} = 0$
4. $\vec{u}$ est dissipative $(M \geq 0)$
5. $\exists\, \epsilon \geq 0$ t.q si en un point $(t_0, x_0) \in Q$ on a:

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r} \int\int_{(t_0 - r^2, x_0 + r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds\, dx < \epsilon^*$$

$\Longrightarrow 1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$

Idée de la preuve

1. $\vec{u}$ appartient à $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1(Q)$
2. $p \in \mathcal{D}'(Q)$
3. $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ et $\operatorname{div} \vec{f} = 0$
4. $\vec{u}$ est dissipative $(M \geq 0)$
5. $\exists\, \epsilon \geq 0$ t.q si en un point $(t_0, x_0) \in Q$ on a:

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r} \int\int_{(t_0 - r^2, x_0 + r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds\, dx < \epsilon^*$$

$\Longrightarrow 1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$

On peut appliquer le Théorème de O'Leary:

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q).$$

Résumé de la preuve

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\vec{u} \text{ solution initiale}} \arrow[r, dash, "+"] \arrow[d] & \boxed{1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}} \arrow[r, "\text{O'Leary}"] & \boxed{\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)} \\
\boxed{\vec{v} \text{ nouvelle variable}} \arrow[r, "\text{Th de Kukavica}"] & \boxed{1_Q \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Perspective

Généraliser les hypothèses sur la force $\vec{f}$:

- on a travaillé avec $\vec{f} \in L^2_t H^1_x$

Perspective

Généraliser les hypothèses sur la force $\vec{f}$:

- on a travaillé avec $\vec{f} \in L^2_t H^1_x$
- est ce qu'on peut considérer une force plus générale?

Perspective

Généraliser les hypothèses sur la force $\vec{f}$:

- on a travaillé avec $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$
- est ce qu'on peut considérer une force plus générale?

  $\vec{f} \in \mathcal{M}_2^{q,\tau}$

Bibliographie

- P.G. Lemarié-Rieusset. The Navier–Stokes problem in the XXIst century. Chapman & Hall/CRC, (2016).
- D.Chamorro, P.G. Lemarié-Rieusset, K. Mayoufi. The role of the pressure in the partial regularty theory for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Preprint, (2016)
- I. Kukavica. On partial regularity for the Navier–Stokes equations. Discrete and continuous dynamical systems, 21:717-728 (2008).
- M.O'Leary. Conditions for the local boundedness of solutions of the Navier–Stokes system in three dimensions. Comm. Partial Differential Equations, 28:617-636 (2003).
- J.Duchon and R.Robert. Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. Nonlinearity, 13:249-255 (2000).

MERCI POUR VOTRE ATTENTION