

Régularité partielle des équations de Navier-Stokes

Kawther Mayoufi

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

sous la direction de **Diego CHAMORRO** et **Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET**



II ConMatE-P

15 Avril 2016

Régularité partielle des équations de Navier-Stokes

Kawther Mayoufi

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

sous la direction de **Diego CHAMORRO** et **Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET**



II ConMatE-P

15 Avril 2016

- 1 Introduction
- 2 Présentation des outils utilisés et le Théorème principal
- 3 Idée de la preuve
- 4 Perspective

Équations de Navier-Stokes

On considère les équations de Navier-Stokes en dimension 3:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

où $\vec{f} \in L_t^2 H_x^{-1}$

Équations de Navier-Stokes

On considère les équations de Navier-Stokes en dimension 3:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

où $\vec{f} \in L_t^2 H_x^{-1}$

Il existe une solution faible $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$

Équations de Navier-Stokes

On a deux théories de la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes:

- La théorie de **Serrin**
- La théorie de **Caffarelli-Kohn et Nirenberg**

Critère de Serrin

Théorème (Serrin '62)

Soit Q un domaine borné de la forme $]a, b[\times B(x_0, r)$. Soit \vec{u} une solution faible des équations de Navier-Stokes,

on suppose

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 H_x^1(Q)$
- $\vec{f} \in L_t^2 H_x^k(Q)$ avec $k \in \mathbb{N}$
- $p \in \mathcal{D}'(Q)$

Si de plus $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)$, alors $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^{k+1}(\tilde{Q}) \cap L_t^2 H_x^{k+2}(\tilde{Q})$

La vorticité

La vorticité $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$$

comme on a

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p \equiv 0$$

les équations de Navier-Stokes deviennent:

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

Remarques

- La pression p est très générale.
- La régularité de \vec{u} est liée à celle de la force \vec{f} .
- Il n'est pas possible d'obtenir des informations sur la régularité **en variable de temps** vu qu'on n'a pas de contrôle sur la pression p : **contre exemple de Serrin**.
- L'hypothèse $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)$ est **très forte**.

Théorème de O'Leary

Théorème (O'Leary '03)

Soit Q un domaine borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit \vec{u} une solution faible des équations de Navier-Stokes telle que

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q), \quad p \in \mathcal{D}'(Q) \quad \text{et} \quad \vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q).$$

Si de plus on a $1_{\mathcal{V}} \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, pour certain $\tau > 5$, où \mathcal{V} est un voisinage du point (t_0, x_0) , alors \vec{u} est une fonction **localement bornée**.

Espace de Morrey parabolique

Espace homogène:

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- $\delta((t, x), (s, y)) = |t - s|^{\frac{1}{2}} + |x - y|$
- $d\mu = dt dx$
- $Q = 5$

Espace de Morrey parabolique

Espace homogène:

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- $\delta((t, x), (s, y)) = |t - s|^{\frac{1}{2}} + |x - y|$
- $d\mu = dt dx$
- $Q = 5$

$$f \in \mathcal{M}_2^{q,\tau} \Leftrightarrow \sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \sup_{r>0} \frac{1}{r^{5(1-\frac{q}{\tau})}} \int_{\delta(t-s,x-y)<r} |f(s,y)|^q ds dy < +\infty$$

$$\mathcal{M}_2^{q,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) = L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$$

Les espaces de Morrey paraboliques sont considérés comme une généralisation des espaces de Lebesgue.

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit \vec{u} une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q .

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit \vec{u} une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q . On suppose que:

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$
- $p(t, x) \in L_t^{q_0} L_x^1(Q)$ $q_0 > 1$
- $\operatorname{div} f = 0$ et $\vec{f}(t, x) \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(Q)$
- $1_Q \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7, \tau}$ avec $\tau > 5/2$
- \vec{u} est adaptée

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit \vec{u} une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q . On suppose que:

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$
- $p(t, x) \in L_t^{q_0} L_x^1(Q)$ $q_0 > 1$
- $\operatorname{div} f = 0$ et $\vec{f}(t, x) \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(Q)$
- $1_Q \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7, \tau}$ avec $\tau > 5/2$
- \vec{u} est adaptée

$$\mu = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |u|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2 \operatorname{div}(p \vec{u}) + 2 \vec{f} \cdot \vec{u}$$

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Théorème (Caffarelli-Kohn et Nirenberg '82/ Vasseur '07)

Soit Q un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Soit \vec{u} une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q . On suppose que:

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$
- $p(t, x) \in L_t^{q_0} L_x^1(Q)$ $q_0 > 1$
- $\operatorname{div} f = 0$ et $\vec{f}(t, x) \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(Q)$
- $1_Q \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7, \tau}$ avec $\tau > 5/2$
- \vec{u} est adaptée

$$\mu = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |u|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2 \operatorname{div}(p \vec{u}) + 2 \vec{f} \cdot \vec{u} \geq 0$$

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

- $\exists \epsilon^* > 0$ t.q si en un point $(t_0, x_0) \in Q$ on a:

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int \int_{(t_0-r^2, t_0+r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds dx < \epsilon^*$$

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

- $\exists \epsilon^* > 0$ t.q si en un point $(t_0, x_0) \in Q$ on a:

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int \int_{(t_0-r^2, t_0+r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds dx < \epsilon^*$$

Alors \vec{u} est **Hölderienne** en **temps** et en **espace** dans un voisinage (t_0, x_0) .

Remarques

- On n'a pas besoin de l'hypothèse $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)$, on l'a remplacée par la notion **d'adaptabilité et la condition de petitesse de gradient**.
- On a des conditions sur la pression p .
- Le contrôle sur la pression p nous permet d'obtenir de la régularité en variable de temps.
- I. Kukavica (2008) a généralisé la théorie de CKN en utilisant les espaces de Morrey paraboliques.

Théorème de Caffarelli-Kohn et Nirenberg

Comme on va s'intéresser à la pression p , on va rappeler l'évolution de son histoire:

- CKN 1982 $p(t, x) \in L_t^{5/4} L_x^{5/4}(Q)$
- F. Lin 1998 $p(t, x) \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}(Q)$
- A. Vasseur 2007 $p(t, x) \in L_t^{q_0} L_x^1(Q) \quad q_0 > 1$

Objectif

► **Objectif**: **affaiblir** les conditions sur la **pression** tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

Objectif

- ▶ **Objectif**: **affaiblir** les conditions sur la **pression** tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.
- ▶ **Problème**: la notion d'adaptabilité n'a plus de sens.

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u})$$

Objectif

- ▶ **Objectif**: **affaiblir** les conditions sur la **pression** tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.
- ▶ **Problème**: la notion d'adaptabilité n'a plus de sens.

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u})$$

- ▶ **Idée**: généraliser la notion d'adaptabilité.

Dissipativité

Définition: solution dissipative

- On suppose $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q)$ avec $Q =]a, b[\times B(x_0, r)$ et $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$,
- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 H_x^1(Q)$,
- $p \in \mathcal{D}'(Q)$.

Dissipativité

Définition: solution dissipative

- On suppose $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q)$ avec $Q =]a, b[\times B(x_0, r)$ et $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$,
- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 H_x^1(Q)$,
- $p \in \mathcal{D}'(Q)$.

\vec{u} est une solution **dissipative** si la distribution M donnée par l'expression

$$M = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2 \vec{u}) - 2\langle \operatorname{div}(p\vec{u}) \rangle + 2\vec{f} \cdot \vec{u} \geq 0$$

où $\langle \operatorname{div}(p\vec{u}) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{div}[(p * \varphi_{\alpha, \varepsilon}) \times (\vec{u} * \varphi_{\alpha, \varepsilon})]$

Théorème principal

Théorème (Chamorro-Lemarié-Mayoufi '16)

Soit $Q =]a, b[\times B(x, \rho)$ un domaine borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et soit (\vec{u}, p) solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q .

On suppose que:

- $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q)$ et $p \in \mathcal{D}'(Q)$,
- $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q)$,
- \vec{u} est dissipative.

Il existe une constante $\epsilon^* > 0$, qui dépend que de ν , telle que, si pour certains points $(t_0, x_0) \in Q$ on a l'inégalité

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{t_0 - r^2, t_0 + r^2} \int_{\times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, x)|^2 dt dx < \epsilon^*,$$

alors la solution \vec{u} est **bornée** au voisinage de (t_0, x_0) .

Remarques

- $p \in \mathcal{D}'$: dû au contre exemple de Serrin on a aucune information sur la régularité de \vec{u} en variable de temps.
 - Par rapport à Serrin on exige moins d'hypothèses sur \vec{u} .
 - Comme la notion de **dissipativité** est **plus générale** que celle de **l'adaptabilité**, notre méthode est une généralisation du théorème de CKN.
- ⇒ Notre Théorème se situe entre les deux théories (Serrin et CKN)

Idée de la preuve

Soit:

$$Q = I \times B(x_0, r)$$

On applique le rotationnel aux équations de Navier-Stokes:

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

avec $\vec{\omega} \in L_t^\infty H_x^{-1} \cap L_t^2 L_x^2$

Idée de la preuve

Soit:

$$Q = I \times B(x_0, r)$$

On applique le rotationnel aux équations de Navier-Stokes:

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

avec $\vec{\omega} \in L_t^\infty H_x^{-1} \cap L_t^2 L_x^2$

On considère

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{u})$$

où $\psi(t, x) = \phi(t)\Phi(x)$ avec $\text{supp} \psi \subset Q$

Idée de la preuve

Proposition

Sous les hypothèses $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q)$ sur la solution \vec{u} des équations de Navier-Stokes, la fonction \vec{v} satisfait les points suivants

- 1) $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0,$
- 2) $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(Q_0) \cap L_t^2 H_x^1(Q_0).$

Idée de la preuve

Proposition

Sous les hypothèses $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q)$, $p \in \mathcal{D}'(Q)$ et $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(Q)$, la fonction \vec{v} satisfait les équations de Navier-Stokes suivantes sur Q_0

$$\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla q + \vec{F},$$

avec les propriétés suivantes

- 1) *la pression q est une fonction telle que $q \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}(Q_0)$,*
- 2) *la force \vec{F} est telle que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ et $\vec{F} \in L_t^2 L_x^2(Q_0)$.*

Idée de la preuve

Proposition

- 1) Si \vec{u} est **dissipative** alors \vec{v} est **adaptée** au sens de CKN.
- 2) Si \vec{u} vérifie la condition de petitesse de gradient alors \vec{v} la vérifie aussi.

Idée de la preuve

La solution \vec{u}	La nouvelle variable \vec{v}
1) $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$	1) $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$
2) \vec{u} vérifie les équations de Navier Stokes $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p + \vec{f}$	2) \vec{v} vérifie les équations de Navier Stokes $\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla q + \vec{F}$
3) $p \in \mathcal{D}'$	3) $q \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}$
4) $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$, $\operatorname{div} \vec{f} = 0$	4) $\vec{F} \in L_t^2 L_x^2$, $\operatorname{div} \vec{F} = 0$
5) \vec{u} est dissipative	5) \vec{v} est adaptée
6) \vec{u} vérifie la condition de petitesse	6) \vec{v} vérifie la condition de petitesse

Idée de la preuve

On peut appliquer le théorème de Kukavika: Il existe $\tau_1 > 5$ tel que

$$1_Q \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3, \tau_1}$$

Idée de la preuve

On peut appliquer le théorème de Kukavika: Il existe $\tau_1 > 5$ tel que

$$1_Q \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3, \tau_1}$$

On peut démontrer que:

Proposition (retour vers \vec{u})

Si $1_Q \vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3, \tau_1}$ alors $1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3, \tau_1}$

Idée de la preuve

1. \vec{u} appartient à $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1(Q)$
2. $p \in \mathcal{D}'(Q)$
3. $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ et $\operatorname{div} \vec{f} = 0$
4. \vec{u} est dissipative ($M \geq 0$)
5. $\exists \epsilon \geq 0$ t.q si en un point $(t_0, x_0) \in Q$ on a:

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int \int_{(t_0-r^2, x_0+r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds dx < \epsilon^*$$

$$\implies 1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3, \tau_1}$$

Idée de la preuve

1. \vec{u} appartient à $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1(Q)$
2. $p \in \mathcal{D}'(Q)$
3. $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ et $\operatorname{div} \vec{f} = 0$
4. \vec{u} est dissipative ($M \geq 0$)
5. $\exists \epsilon \geq 0$ t.q si en un point $(t_0, x_0) \in Q$ on a:

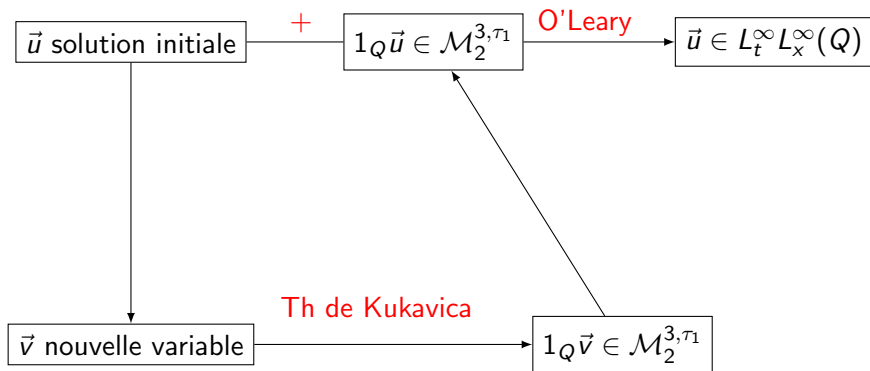
$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int \int_{(t_0-r^2, x_0+r^2) \times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 ds dx < \epsilon^*$$

$$\implies 1_Q \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3, \tau_1}$$

On peut appliquer le Théorème de O'Leary:

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q).$$

Résumé de la preuve



Perspective

Généraliser les hypothèses sur la force \vec{f} :

- on a travaillé avec $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$

Perspective

Généraliser les hypothèses sur la force \vec{f} :

- on a travaillé avec $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$
- est ce qu'on peut considérer une force plus générale?

Perspective

Généraliser les hypothèses sur la force \vec{f} :

- on a travaillé avec $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$
- est ce qu'on peut considérer une force plus générale?

$$\vec{f} \in \mathcal{M}_2^{q,\tau}$$

Bibliographie

- P.G. Lemarié-Rieusset. The Navier–Stokes problem in the XXIst century. Chapman & Hall/CRC, (2016).
- D.Chamorro, P.G. Lemarié-Rieusset, K. Mayoufi. The role of the pressure in the partial regularity theory for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Preprint, (2016)
- I. Kukavica. On partial regularity for the Navier–Stokes equations. Discrete and continuous dynamical systems, 21:717-728 (2008).
- M.O’Leary. Conditions for the local boundedness of solutions of the Navier–Stokes system in three dimensions. Comm. Partial Differential Equations, 28:617-636 (2003).
- J.Duchon and R.Robert. Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. Nonlinearity, 13:249-255 (2000).

MERCI POUR VOTRE ATTENTION