Procesos polinomiales y sus aplicaciones en matemáticas financieras

II-ConMate-P

Sergio Pulido
LaMME – ENSIIE/ Université d'Evry Val d'Essonne

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

15 de abril, 2016

ensiie Paris-Évry | Strasbourg

Modelos de factores estocásticos en finanzas

- Modelos de **Factores Financieros = procesos estocásticos** (X_t)
  - Para cada $t \geq 0$, $X_t \in \mathbb{R}^d$ es una variable aleatoria
- X_t **puede representar** en la fecha t:
  - el (logaritmo del) **precio de un activo / índice financiero**
  - las **tazas de interés**
  - la **correlación o volatilidad** de otros factores...
- **Usos** de modelos:
  - **valorizar opciones / derivados** financieros
  - para **cubrir y administrar los diferentes riesgos** asociados a estrategias financieras

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- Usualmente $(X_t) \in \mathbb{R}^d$ satisface una **Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)**

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t) dW_t \tag{1}$$

- En este caso decimos que (X_t) **es una difusión**
- **Las fluctuaciones aleatorias:** $dW_t =$ **incrementos infinitesimales** de un Movimiento Browniano (MB) (W_t)
- **Propiedades de un Movimiento Browniano** (W_t) unidimensional son:
  1. $t \mapsto W_t$ es continua casi-seguramente **(Trayectorias continuas)**
  2. Si $s < t < u$, $W_u - W_t \perp\!\!\!\perp W_t - W_s$ **(Incrementos independientes)**
  3. Para todo $s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ **(Incrementos normales)**

Ejemplos

1. **Modelo de Black-Sholes:** Precio del activo financiero – $S_t = \mathrm{e}^{X_t}$

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma dW_t$$

   μ, σ constantes

2. **Modelo de Heston:** Precio del activo financiero – $S_t = \mathrm{e}^{X_t}$

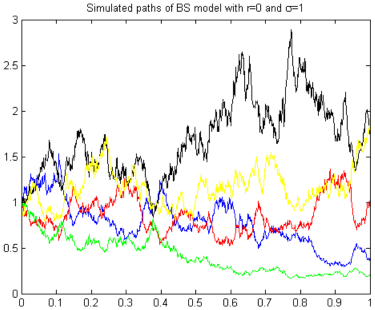
$$dX_t = \mu\, dt + \sqrt{V_t}(\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, d\widetilde{W}_t)$$
$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)\, dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t$$

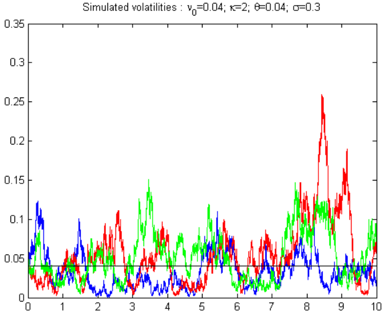
   $V_t =$ **volatilidad estocástica**; $W \perp\!\!\!\perp \widetilde{W}$; $\rho =$correlación

3. **Model de Cox-Ingersoll-Ross (CIR):** Tazas de interés en el mercado r_t

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)\, dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t$$

Simulaciones - Black-Scholes (izquierda) y CIR (derecha)





La variación cuadrática

- Los **caminos de la solución de una EDE** unidimensional (1) **son rugosos**
- **La variación cuadrática** (que escribimos $[X, X]_t$) de estos caminos no se anula:

$$[X, X]_t = \lim \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\, ds, \qquad (2)$$

donde el límite se toma con respecto a particiones del intervalo $[0, t]$ cada vez mas finas.

Fórmula de Itô

- **Nuevo término cuando se utiliza la fórmula de la cadena**
- Supongamos que $v(t,x) \in C^{1,2}$, entonces

$$\begin{aligned} dv(t,X_t) &= v_t\,dt + v_x\,dX_t \boxed{+\frac{1}{2}v_{xx}\,d[X,X]_t} \\ &= (v_t + \mathcal{G}v)\;dt + v_x\sigma dW_t, \end{aligned} \tag{3}$$

con

$$\mathcal{G}v = v_x b + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}$$

Esta es la **Fórmula de Itô**

- $\mathcal{G}$ = **Generador infinitesimal del proceso** (X_t).
- **Caso multidimensional:**

$$\mathcal{G}v = \nabla v_x^\top b + \frac{1}{2}tr(a\nabla^2 v_{xx}), \tag{4}$$

donde $a = \sigma\sigma^\top$

Cálculo de esperanzas - EDPs

- **Ejemplo:** $f(X_T)$ = pago (actualizado) de un derivado / opción en la fecha de vencimiento T
  - Opción Call (compra): $f(X_T) = (\mathrm{e}^{X_T} - K)_+ = max(\mathrm{e}^{X_T} - K, 0)$
  - Opción Put (venta): $f(X_T) = (K - \mathrm{e}^{X_T})_+ = max(K - \mathrm{e}^{X_T}, 0)$

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \mathbb{E}[f(X_T)|X_t = x] \\ &= \textbf{precio al instante } t \textbf{ del derivado (si } X_t = x\textbf{)} \end{aligned}$$

- **La EDP correspondiente:**

$v(t, X_t)$ = esperanza condicional $\Rightarrow$ coeficiente de dt en (3) $= 0$

$\Rightarrow v(t,x)$ satisface el **Problema de Cauchy**

$$\boxed{v_t + \mathcal{G}v = 0; \quad v(T,x) = f(x)} \tag{5}$$

donde $\mathcal{G}$ es el generador infinitesimal de (X_t)

Difusiones afines: Caracterización - Ejemplos

Notación: $\mathrm{Pol}_n =$ espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$

- **Difusiones afines:** Procesos (X_t) que satisfacen (1) donde

$$b_i(t,x) = b_i(x) \in \mathrm{Pol}_1$$
$$a_{ij}(t,x) = a_{ij}(x) = (\sigma(x)\sigma(x)^\top)_{ij} \in \mathrm{Pol}_1$$

  para todo i,j

- **Ejemplos:** Modelos de Black-Scholes, Heston y CIR

Función característica - Simplificación de EDPs en EDOs

- Supongamos que (X_t) es una difusión afín
- Tomemos para el **problema de Cauchy** (5)

$$\boxed{v(t,x) = \mathrm{e}^{\phi(t)+\langle\psi(t),x\rangle};\ f(x) = \mathrm{e}^{i\nu x} = v(T,x)}$$

- (ϕ,ψ) satisface un **Sistema de Riccati de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)!**
- **Función Característica** (que determina la distribución)

$$\Phi_{X_t}(\nu) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\nu X_t}|X_0 = x] = v(0,x) = \mathrm{e}^{\phi(0)+\langle\psi(0),x\rangle}$$

es una función exponencial afín!

- $\boxed{\text{Métodos numéricos para EDOs} >> \text{Métodos numéricos para EDPs}}$

Métodos de Fourier - Precios de derivados

- Sea $X = \log S$ el logaritmo del precio de un activo
- Sea Φ_{X_t} la **función característica de X_T= la Transformada de Fourier de la densidad $q(x)$ de X_T**

$$\Phi_{X_T}(\nu) = \widehat{q}(\nu) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\nu X_T}] = \mathrm{e}^{\phi(0)+\langle\psi(0),X_0\rangle}$$

- **Valorización:** Pago actualizado de un derivado $f(X_T)$. Utilizando la formula de Plancherel/ Parseval el precio es

$$\begin{aligned}\pi_f &= \mathbb{E}[f(X_T)] = \int f(x)\,q(x)\,dx. \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\nu)\overline{\widehat{q}(\nu)}\,d\nu,\end{aligned}$$

- **Línea de integración apropiada en el dominio complejo $\Rightarrow$ aproximación numérica eficaz**

Ejemplo - Procesos acotados - Modelo de Jacobi

Procesos afines $\Rightarrow$ espacio de estado no acotado

- **Mayor flexibilidad si factores acotados** (e.g. correlaciones, tazas de interés, volatilidad acotadas)
- **Ejemplo - Modelo de Jacobi:** $S_t = \mathrm{e}^{X_t}$ el precio de un activo

$$\begin{aligned} dV_t &= \kappa(\theta - V_t)\,dt + \sigma\sqrt{Q(V_t)}\,dW_t \\ dX_t &= (r - q - V_t/2)\,dt + \rho\sqrt{Q(V_t)}\,dW_t + \sqrt{V_t - \rho^2\,Q(V_t)}\,d\widetilde{W}_t \end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$Q(v) = \frac{(v - v_{min})(v_{max} - v)}{(\sqrt{v_{max}} - \sqrt{v_{min}})^2}.$$

Modelo con volatilidad acotada en $[v_{min}, v_{max}]$!

- **Componentes cuadráticas en la matriz $a \Rightarrow$ el proceso no es afín!**

Caracterización de Difusiones Polinomiales

- **Difusiones polinomiales (DPs):** Procesos (X_t) que satisfacen (1) donde

$$b_i(t,x) = b_i(x) \in \mathrm{Pol}_1$$

$$a_{ij}(t,x) = \boxed{a_{ij}(x) = (\sigma(x)\sigma(x)^\top)_{ij} \in \mathrm{Pol}_2}$$

para todo i, j

- De manera equivalente, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{G}\mathrm{Pol}_n \subseteq \mathrm{Pol}_n \tag{7}$$

- O también, si $f(x) \in \mathrm{Pol}_n$ entonces existe $g(x) \in \mathrm{Pol}_n$ t.q.

$$g(X_t) = \mathbb{E}[f(X_T)|X_t] \tag{8}$$

Cálculo de momentos - Simplificación de EDPs en EDOs

- Fijemos $H(x) = (h_1(x), \ldots, h_N(x))^\top$ una base de Pol_n
- $G^\top =$ la matriz asociada al operador $\mathcal{G}|_{\mathrm{Pol}_n}$
- **Problema de Cauchy** (5) **con** $v(T,x) = H(x)$: Supongamos

$$\boxed{v(t,x) = \alpha(t)H(x) \in \mathrm{Pol}_n^N}$$

- **Sistema de EDPs = Sistema lineal de EDOs**

$$\boxed{\alpha'(t) + G^\top \alpha(t) = 0;\ \alpha(T) = Id_N}$$

- La solución es

$$v(t,x) = \mathrm{e}^{G^\top (T-t)} H(x)$$

- **Momentos se pueden calcular con una matrix exponencial!**

$$\mathbb{E}[h_i(X_t)|X_t] = (H(x)^\top \mathrm{e}^{G(T-t)})_i$$

Aproximación de densidades con momentos

For (DPs) Función característica no siempre disponible!

- En muchos casos (e.g. Modelo de Jacobi), existe $w(x)$ densidad t.q.

  1. Si $q(x)$ es la densidad de X_T, entonces

  $$\frac{q(x)}{w(x)} \in L^2_w = \left\{ f : \int f^2(x) w(x)\, dx < \infty \right\}$$

  2. Existe $(H_n(x))$ una base ortonormal de polinomios de L^2_w

- **Serie para aproximar $q(x)$:**

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n H_n(x) w(x)$$

donde $l_n = \mathbb{E}[H_n(X_T)]$ **son combinaciones de momentos!!**

- **Precio de un derivado:** Pago actualizado $f(x) \in L^2_w$

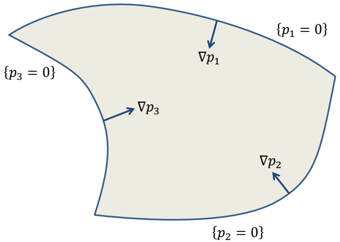
$$\pi_f = \sum l_n \langle f, H_n \rangle_w$$

Aspectos de existencia

- Consideremos un espacio semialgebraico cerrado

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : p(x) \geq 0 \ \forall p \in \mathcal{P}\}$$

donde $\mathcal{P}$ es una familia finita de polinomios



- **Cuáles son las condiciones para la existencia de un difusión polinomial en E?**

Aspectos de existencia (cont.)

- **Condiciones necesarias:** $\forall p \in \mathcal{P}$
  1. $a\nabla p = 0$ on $E \cap \{p = 0\}$ **(no difusión aleatoria ortogonal a la frontera)**
  2. $\mathcal{G}p \geq 0$ on $E \cap \{p = 0\}$ **(fuerza atrayente hacia el interior de E)**

- **Condiciones suficientes:** $\forall p \in \mathcal{P}$
  1. $a(x) \in \mathbb{S}_d^+ \; \forall x \in E$,
  2. $\mathcal{G}p > 0$ on $E \cap \{p = 0\}$
  3. $a\nabla p = 0$ on $\{p = 0\}$
  4. $\forall p \in \mathcal{P}$, p es irreducible y cambia de signo sobre $\mathbb{R}^d$

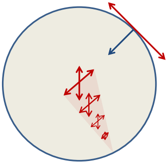
- **Aspectos algebraicos:** Lema de geometría algebraica real:

$$+ \Rightarrow a\nabla p = pF$$

donde F es un vector con entradas polinomiales!

La bola unitaria

- Sea $E = \{x : \|x\| \leq 1\}$ ($p(x) = 1 - \|x\|^2$)
- **Movimientos tangenciales y radiales**



- **La condición sobre la matriz a:**

$$a(x) = (1 - \|x\|^2)\alpha + c(x)$$

donde $\alpha \in \mathbb{S}^d_+$ y

$$c \in \mathcal{C}_+ = \left\{c : c_{ij} \in \mathrm{Hom}_2;\ c(x)x = 0;\ c(x) \in \mathbb{S}^d_+ \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d\right\}$$

La bola unitaria (cont.)

- **Ejemplo de $c \in \mathcal{C}_+$:**

$$c(x) = \sum_{i=1}^{m} A_k x x^\top A_k^\top$$

donde las matrices A_k son anti-simétricas

- **Pregunta: Son todos los elementos de $\mathcal{C}_+$ de esta forma?**
- **Pregunta equivalente:** todas las **formas bicuadráticas nonegativas que se anulan sobre la diagonal son suma de cuadrados?**
- **Respuesta parcial:** $d \leq 4$: **Sí!** $d \geq 6$: **No!** $d = 5$ **no sabemos!**

Líneas de investigación

1. **Procesos polinomiales con saltos:** existencia, unicidad, caracterizaciones, aplicaciones ...
2. **Propiedades de absorción de las fronteras** del espacio de estado de procesos polinomiales
3. **Análisis asintótico de procesos polinomiales:** distribuciones límite
4. **Modelización en finanzas u otros campos** con procesos polinomiales
5. **Métodos basados en el cálculo eficaz de momentos**

Muchas gracias por su atención!!!!

Literatura

1. **C. Cuchiero, M. Keller-Ressel, and J. Teichmann (2012). Polynomial processes and their applications to mathematical finance.** Finance and Stochastics, 16:711–740, 2012
2. **D. Filipović, M. Larsson, and A. Trolle (2014b). Linear-rational term structure models.** Forthcoming Journal of Finance, http://ssrn.com/abstract=2397898
3. **D. Filipović and M. Larsson (2015). Polynomial Preserving Diffusions and Applications in Finance.** Forthcoming Finance and Stochastics, http://arxiv.org/pdf/1404.0989v6.pdf
4. **M. Larsson and S. Pulido (2015). Polynomial preserving diffusions on compact quadric sets.** http://arxiv.org/pdf/1511.03554.pdf
5. **D. Ackerer, D. Filipović, and S. Pulido (2016). The Jacobi stochastic volatility model.** Working paper.