

Procesos polinomiales y sus aplicaciones en matemáticas financieras

II-ConMate-P

Sergio Pulido

LaMME – ENSIIE/ Université d'Évry Val d'Essonne



Laboratoire de
Mathématiques
et Modélisation
d'Évry

15 de abril, 2016



Modelos de factores estocásticos en finanzas

- Modelos de **Factores Financieros = procesos estocásticos** (X_t)
 - Para cada $t \geq 0$, $X_t \in \mathbb{R}^d$ es una variable aleatoria
- X_t puede representar en la fecha t :
 - el (logaritmo del) **precio de un activo / índice financiero**
 - las **tazas de interés**
 - la **correlación o volatilidad** de otros factores...
- **Usos** de modelos:
 - **valorizar opciones / derivados** financieros
 - para **cubrir y administrar los diferentes riesgos** asociados a estrategias financieras

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- Usualmente $(X_t) \in \mathbb{R}^d$ satisface una **Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)**

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (1)$$

- En este caso decimos que (X_t) es una **difusión**
- **Las fluctuaciones aleatorias:** $dW_t =$ **incrementos infinitesimales** de un **Movimiento Browniano (MB)** (W_t)
- **Propiedades de un Movimiento Browniano** (W_t) unidimensional son:
 - 1 $t \mapsto W_t$ es continua casi-seguramente (**Trayectorias continuas**)
 - 2 Si $s < t < u$, $W_u - W_t \perp W_t - W_s$ (**Incrementos independientes**)
 - 3 Para todo $s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ (**Incrementos normales**)

Ejemplos

- ① **Modelo de Black-Sholes:** Precio del activo financiero – $S_t = e^{X_t}$

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

μ, σ constantes

- ② **Modelo de Heston:** Precio del activo financiero – $S_t = e^{X_t}$

$$dX_t = \mu dt + \sqrt{V_t}(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\widetilde{W}_t)$$

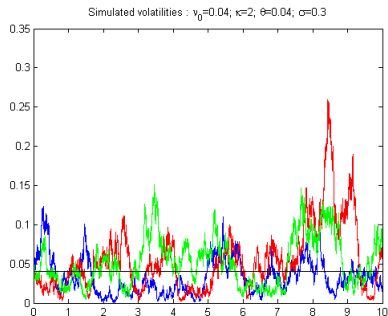
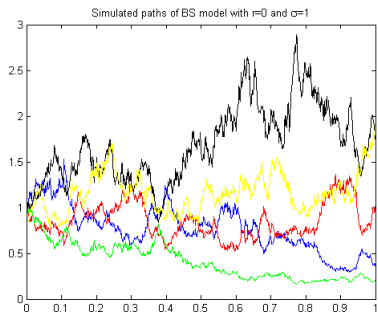
$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t$$

$V_t =$ **volatilidad estocástica**; $W \perp \widetilde{W}$; $\rho =$ correlación

- ③ **Model de Cox-Ingersoll-Ross (CIR):** Tasas de interés en el mercado r_t

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t$$

Simulaciones - Black-Scholes (izquierda) y CIR (derecha)



La variación cuadrática

- Los **caminos de la solución de una EDE** unidimensional (1) **son rugosos**
- **La variación cuadrática** (que escribimos $[X, X]_t$) de estos caminos no se anula:

$$[X, X]_t = \lim \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds, \quad (2)$$

donde el límite se toma con respecto a particiones del intervalo $[0, t]$ cada vez mas finas.

Fórmula de Itô

- **Nuevo término cuando se utiliza la fórmula de la cadena**
- Supongamos que $v(t, x) \in C^{1,2}$, entonces

$$\begin{aligned}
 dv(t, X_t) &= v_t dt + v_x dX_t + \frac{1}{2}v_{xx} d[X, X]_t \\
 &= (v_t + \mathcal{G}v) dt + v_x \sigma dW_t,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

con

$$\mathcal{G}v = v_x b + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}$$

Esta es la **Fórmula de Itô**

- \mathcal{G} = **Generador infinitesimal del proceso** (X_t) .
- **Caso multidimensional:**

$$\mathcal{G}v = \nabla v_x^\top b + \frac{1}{2}tr(a \nabla^2 v_{xx}), \tag{4}$$

donde $a = \sigma \sigma^\top$

Cálculo de esperanzas - EDPs

- **Ejemplo:** $f(X_T)$ = pago (actualizado) de un derivado / opción en la fecha de vencimiento T
 - Opción Call (compra): $f(X_T) = (e^{X_T} - K)_+ = \max(e^{X_T} - K, 0)$
 - Opción Put (venta): $f(X_T) = (K - e^{X_T})_+ = \max(K - e^{X_T}, 0)$

$$v(t, x) = \mathbb{E}[f(X_T) | X_t = x]$$

= precio al instante t del derivado (si $X_t = x$)

- **La EDP correspondiente:**

$v(t, X_t)$ = esperanza condicional \Rightarrow coeficiente de dt en (3) = 0

$\Rightarrow v(t, x)$ satisface el **Problema de Cauchy**

$$\boxed{v_t + \mathcal{G}v = 0; \quad v(T, x) = f(x)} \quad (5)$$

donde \mathcal{G} es el generador infinitesimal de (X_t)

Difusiones afines: Caracterización - Ejemplos

Notación: Pol_n = espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$

- **Difusiones afines:** Procesos (X_t) que satisfacen (1) donde

$$b_i(t, x) = b_i(x) \in \text{Pol}_1$$

$$a_{ij}(t, x) = a_{ij}(x) = (\sigma(x)\sigma(x)^\top)_{ij} \in \text{Pol}_1$$

para todo i, j

- **Ejemplos:** Modelos de Black-Scholes, Heston y CIR

Función característica - Simplificación de EDPs en EDOs

- Supongamos que (X_t) es una difusión afín
- Tomemos para el **problema de Cauchy** (5)

$$v(t, x) = e^{\phi(t) + \langle \psi(t), x \rangle}; \quad f(x) = e^{i\nu x} = v(T, x)$$

- (ϕ, ψ) satisface un **Sistema de Riccati de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)**!
- **Función Característica** (que determina la distribución)

$$\Phi_{X_t}(\nu) = \mathbb{E}[e^{i\nu X_t} | X_0 = x] = v(0, x) = e^{\phi(0) + \langle \psi(0), x \rangle}$$

es una función exponencial afín!

-

Métodos numéricos para EDOs \gg Métodos numéricos para EDPs

Métodos de Fourier - Precios de derivados

- Sea $X = \log S$ el logaritmo del precio de un activo
- Sea Φ_{X_t} la **función característica de $X_T =$ la Transformada de Fourier de la densidad $q(x)$ de X_T**

$$\Phi_{X_T}(\nu) = \widehat{q}(\nu) = \mathbb{E}[e^{i\nu X_T}] = e^{\phi(0) + \langle \psi(0), X_0 \rangle}$$

- **Valorización:** Pago actualizado de un derivado $f(X_T)$. Utilizando la **formula de Plancherel/ Parseval** el precio es

$$\begin{aligned} \pi_f &= \mathbb{E}[f(X_T)] = \int f(x) q(x) dx. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\nu) \overline{\widehat{q}(\nu)} d\nu, \end{aligned}$$

- **Línea de integración apropiada en el dominio complejo \Rightarrow aproximación numérica eficaz**

Ejemplo - Procesos acotados - Modelo de Jacobi

Procesos afines \Rightarrow espacio de estado no acotado

- **Mayor flexibilidad si factores acotados** (e.g. correlaciones, tasas de interés, volatilidad acotadas)
- **Ejemplo - Modelo de Jacobi:** $S_t = e^{X_t}$ el precio de un activo

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{Q(V_t)} dW_t$$

$$dX_t = (r - q - V_t/2) dt + \rho \sqrt{Q(V_t)} dW_t + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)} d\widetilde{W}_t \quad (6)$$

donde

$$Q(v) = \frac{(v - v_{min})(v_{max} - v)}{(\sqrt{v_{max}} - \sqrt{v_{min}})^2}.$$

Modelo con volatilidad acotada en $[v_{min}, v_{max}]$!

- **Componentes cuadráticas en la matriz $a \Rightarrow$ el proceso no es afín!**

Caracterización de Difusiones Polinomiales

- **Difusiones polinomiales (DPs):** Procesos (X_t) que satisfacen (1) donde

$$b_i(t, x) = b_i(x) \in \text{Pol}_1$$

$$a_{ij}(t, x) = a_{ij}(x) = (\sigma(x)\sigma(x)^\top)_{ij} \in \text{Pol}_2$$

para todo i, j

- De manera equivalente, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{G}\text{Pol}_n \subseteq \text{Pol}_n \quad (7)$$

- O también, si $f(x) \in \text{Pol}_n$ entonces existe $g(x) \in \text{Pol}_n$ t.q.

$$g(X_t) = \mathbb{E}[f(X_T)|X_t] \quad (8)$$

Cálculo de momentos - Simplificación de EDPs en EDOs

- Fijemos $H(x) = (h_1(x), \dots, h_N(x))^T$ una base de Pol_n
- G^T = la matriz asociada al operador $\mathcal{G}|_{\text{Pol}_n}$
- **Problema de Cauchy (5) con $v(T, x) = H(x)$** : Supongamos

$$v(t, x) = \alpha(t)H(x) \in \text{Pol}_n^N$$

- **Sistema de EDPs = Sistema lineal de EDOs**

$$\alpha'(t) + G^T \alpha(t) = 0; \quad \alpha(T) = Id_N$$

- La solución es

$$v(t, x) = e^{G^T(T-t)} H(x)$$

- **Momentos se pueden calcular con una matrix exponencial!**

$$\mathbb{E}[h_i(X_t)|X_t] = (H(x)^T e^{G(T-t)})_i$$

Aproximación de densidades con momentos

For (DPs) Función característica no siempre disponible!

- En muchos casos (e.g. Modelo de Jacobi), existe $w(x)$ densidad t.q.

- 1 Si $q(x)$ es la densidad de X_T , entonces

$$\frac{q(x)}{w(x)} \in L_w^2 = \left\{ f : \int f^2(x)w(x) dx < \infty \right\}$$

- 2 Existe $(H_n(x))$ una base ortonormal de polinomios de L_w^2

- **Serie para aproximar $q(x)$:**

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n H_n(x) w(x)$$

donde $l_n = \mathbb{E}[H_n(X_T)]$ **son combinaciones de momentos!!**

- **Precio de un derivado:** Pago actualizado $f(x) \in L_w^2$

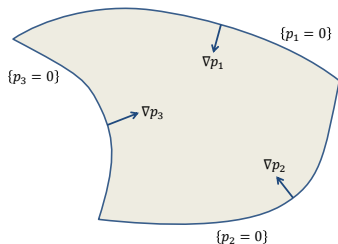
$$\pi_f = \sum l_n \langle f, H_n \rangle_w$$

Aspectos de existencia

- Consideremos un **espacio semialgebraico cerrado**

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : p(x) \geq 0 \ \forall p \in \mathcal{P}\}$$

donde \mathcal{P} es una familia finita de polinomios



- Cuáles son las condiciones para la existencia de un difusión polinomial en E ?**

Aspectos de existencia (cont.)

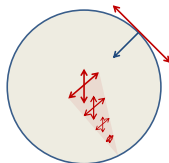
- **Condiciones necesarias:** $\forall p \in \mathcal{P}$
 - ① $a\nabla p = 0$ on $E \cap \{p = 0\}$ (no difusión aleatoria ortogonal a la frontera)
 - ② $\mathcal{G}p \geq 0$ on $E \cap \{p = 0\}$ (fuerza atrayente hacia el interior de E)
- **Condiciones suficientes:** $\forall p \in \mathcal{P}$
 - ① $a(x) \in \mathbb{S}_d^+ \forall x \in E$,
 - ② $\mathcal{G}p > 0$ on $E \cap \{p = 0\}$
 - ③ $a\nabla p = 0$ on $\{p = 0\}$ ●
 - ④ $\forall p \in \mathcal{P}$, p es irreducible y cambia de signo sobre \mathbb{R}^d ●
- **Aspectos algebraicos:** Lema de geometría algebraica real:

$$\text{●} + \text{●} \Rightarrow a\nabla p = pF$$

donde F es un vector con entradas polinomiales!

La bola unitaria

- Sea $E = \{x : \|x\| \leq 1\}$ ($p(x) = 1 - \|x\|^2$)
- **Movimientos tangenciales y radiales**



- **La condición sobre la matriz a :**

$$a(x) = (1 - \|x\|^2)\alpha + c(x)$$

donde $\alpha \in \mathbb{S}_+^d$ y

$$c \in \mathcal{C}_+ = \left\{ c : c_{ij} \in \text{Hom}_2; c(x)x = 0; c(x) \in \mathbb{S}_+^d \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

La bola unitaria (cont.)

- Ejemplo de $c \in \mathcal{C}_+$:

$$c(x) = \sum_{i=1}^m A_k x x^\top A_k^\top$$

donde las matrices A_k son anti-simétricas

- **Pregunta: Son todos los elementos de \mathcal{C}_+ de esta forma?**
- **Pregunta equivalente: todas las formas bicuadráticas nonegativas que se anulan sobre la diagonal son suma de cuadrados?**
- **Respuesta parcial: $d \leq 4$: Sí! $d \geq 6$: No! $d = 5$ no sabemos!**

Líneas de investigación

- 1 **Procesos polinomiales con saltos:** existencia, unicidad, caracterizaciones, aplicaciones ...
- 2 **Propiedades de absorción de las fronteras** del espacio de estado de procesos polinomiales
- 3 **Análisis asintótico de procesos polinomiales:** distribuciones límite
- 4 **Modelización en finanzas u otros campos** con procesos polinomiales
- 5 **Métodos basados en el cálculo eficaz de momentos**

Muchas gracias por su atención!!!!

Literatura

- ① **C. Cuchiero, M. Keller-Ressel, and J. Teichmann (2012).** Polynomial processes and their applications to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, 16:711–740, 2012
- ② **D. Filipović, M. Larsson, and A. Trolle (2014b).** Linear-rational term structure models. Forthcoming *Journal of Finance*, <http://ssrn.com/abstract=2397898>
- ③ **D. Filipović and M. Larsson (2015).** Polynomial Preserving Diffusions and Applications in Finance. Forthcoming *Finance and Stochastics*, <http://arxiv.org/pdf/1404.0989v6.pdf>
- ④ **M. Larsson and S. Pulido (2015).** Polynomial preserving diffusions on compact quadric sets. <http://arxiv.org/pdf/1511.03554.pdf>
- ⑤ **D. Ackerer, D. Filipović, and S. Pulido (2016).** The Jacobi stochastic volatility model. Working paper.