Lección n°2: Definición y propiedades básicas en el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$

USFQ, septiembre 2017

Índice

1. Introducción

En esta lección definimos la transformación de Fourier de una función que pertenece al espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^d)$ e introducimos las propiedades básicas que esta transformación satisface. Como veremos a lo largo de esta lección, el espacio funcional $L^1(\mathbb{R}^d)$ nos provee un marco de trabajo cómodo para una primera definición de la transformación de Fourier y además, nos permite deducir de manera natural algunas de las principales propiedades que la transformación de Fourier satisface y las cuales nos serán de gran utilidad para las lecciones posteriores, en particular en la Lección n°5 donde estudiaremos algunas aplicaciones al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

2. Definición de la transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

Definición 1 *(Transformación de Fourier) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformacion de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}(f)$, se define como la siguiente integral: para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx. \tag{1}$$

Donde, para $x, \xi \in \mathbb{R}^d$, el peso $e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ se define a través de la formula de Euler:

$$e^{-2\pi i x\cdot\xi} = \cos(2\pi x\cdot\xi) - i\sin(2\pi x\cdot\xi). \tag{2}$$

En la siguiente proposición veremos que la función $\mathcal{F}(f)$ está bien definida cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\mathcal{F}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y se tiene $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.*

Prueba. Basta observar que para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ se tiene $|e^{-2\pi i x\cdot\xi}| \leq 1$ y entonces podemos escribir

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-2\pi i x\cdot\xi}||f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1}.$$

■

De esta manera, para que la cantidad $\mathcal{F}(f)(\xi)$ dada en (1) tenga sentido basta que f pertenezca a $L^1(\mathbb{R}^d)$ y esto justifica el hecho que hayamos elegido este espacio de Lebesgue para introducir la transformación de Fourier.

Además, de la formula (1), para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene directamente $\mathcal{F}(\lambda f + g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$ y entonces junto con la Proposición 1 se tiene:

Proposición 2 *La transformación de Fourier $\mathcal{F}$ es un operador lineal y acotado de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Presentamos ahora un ejemplo clásico de la transformación de Fourier de una función: consideremos la función gaussiana

$$h(x) = e^{-\pi|x|^2}, \tag{3}$$

usando la formula (1), en la Lección n°4 (Ejemplos sobre la transformación de Fourier) mostraremos que

$$\mathcal{F}(h)(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}. \tag{4}$$

Vemos entonces que la transformación de Fourier de una gaussiana es también una gaussiana. Este ejemplo clásico nos será útil más adelante en la Sección 4.1.

3. Propiedades básicas de la transformación de Fourier de una función

En esta sección, la función f pertenece siempre al espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ y estudiamos la principales propiedades de su transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ definida en (1).

3.1. Traslación, dilatación y reflexión

Dada la función $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, vamos a considerar tres operaciones sobre esta función: traslación, dilatación y reflexión, las cuales, en general, son de gran utilidad en el estudio de las propiedades de los espacios funcionales.

Recordemos la definción de estas operaciones.

Definición 2 *Para $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$ se define:*

*1) **Traslación:** $f(\cdot - y)(x) = f(x - y)$.*

*2) **Dilatación:** $f(\varepsilon\cdot)(x) = f(\varepsilon x)$.*

*3) **Reflexión:** $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.*

Veamos ahora cómo se comporta la transformacion de Fourier $\mathcal{F}(f)$ respecto a estas tres operaciones.

Proposición 3 *Para todo $y \in \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$ se tiene:*

*1) **Traslación:** $\mathcal{F}(f(\cdot - y))(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$ y $\mathcal{F}(f)(\xi - y) = \mathcal{F}(e^{2\pi y\cdot x}f)(\xi)$.*

*2) **Dilatación:** $\mathcal{F}(f(\varepsilon\cdot))(\xi) = \dfrac{1}{\varepsilon^d}\mathcal{F}(f)\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)$.*

*3) **Reflexión:** $\mathcal{F}\left(\widetilde{f}\right)(\xi) = \widetilde{\mathcal{F}(f)}(\xi)$.*

La prueba de esta proposición es una consecuencia inmediata de la formula (1) y es más interesante hacer algunas observaciones sobre este resultado.

- En la primera identidad del punto 1) de esta proposición vemos que si trasladamos la función f con respecto a $y \in \mathbb{R}^d$: $f(x-y)$, entonces su trasformación de Fourier $\mathcal{F}(f)(\xi)$ está multiplicada por el factor $e^{-2\pi i y\cdot\xi}$.
- Recíprocamente, en la segunda identidad del punto 1) vemos ahora que: si primero multiplicamos la función f por el factor $e^{2\pi i y\cdot\xi}$, entonces la transformación de Fourier de f se traslada con respecto a y: $\mathcal{F}(f)(\xi - y)$.
- En el punto 2) nos dice cómo se comporta la transformación de Fourier con respecto a un cambio de escala.
- Finalmente, en el punto 3) observamos que podemos "intercambiar"la transformación de Fourier de una función con su reflexión.

El punto 3) de esta proposición nos da una información interesante si consideramos el caso uni-dimensional cuando $d = 1$, es decir, si consideremos funciones definidas sobre $\mathbb{R}$. En efecto, decimos que $g \in L^1(\mathbb{R})$ es una función radial si se tiene

$$\widetilde{g(x)} = g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. De este manera, por el punto 3) de esta proposición podemos escribir

$$\widetilde{\mathcal{F}(g)}(\xi) = \mathcal{F}(\widetilde{g})(\xi) = \mathcal{F}(g)(\xi),$$

y entonces, en el caso cuando $d = 1$, podemos ver que la transformación de Fourier de una función radial es también una función radial.

Esta propiedad se generaliza sin problema al caso de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^d$.

3.2. Transformación de Fourier de una función radial

Decimos que la función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ es radial si para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ tales que $|x_1| = |x_2|$ se tiene $f(x_1) = f(x_2)$.

Proposición 4 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es una función radial entones $\mathcal{F}(f)$ es una función radial.*

Prueba. Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ tales que $|\xi_1| = |\xi_2|$. Entonces existe A una matriz ortogonal tal que $A\xi_1 = \xi_2$. En efecto, escribiendo los vectores ξ_1 y ξ_2 en coordenadas polares: para $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^{d-1}$ (donde $\mathbb{S}^{d-1}$ denota la esfera unidad en $\mathbb{R}^d$) se tiene $\xi_1 = |\xi_1|\sigma_1$ y $\xi_2 = |\xi_2|\sigma_2$, de donde, como $|\xi_1| = |\xi_2|$ podemos escribir $\xi_1 = |\xi_1|\sigma_1$ y $\xi_2 = |\xi_1|\sigma_2$. Luego, elegimos la matriz A como la matriz de rotation de vector σ_1 al vector σ_2, es decir $A\sigma_1 = \sigma_2$ (A es una matriz ortogonal y $\det(A) = 1$) y entonces podemos escribir $A\xi_1 = \xi_2$.

De esta manera se tiene:

$$\mathcal{F}(f)(\xi_2) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi_2} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot A\xi_1} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i A^t x\cdot\xi_1} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i A^{-1} x\cdot\xi_1} f(x)dx,$$

y con el cambio de variable $y = A^{-1}x$, como $det(A) = 1$, obtenemos

$$\mathcal{F}(f)(\xi_2) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y\cdot\xi_1} f(Ay)dy.$$

Pero, como A es una matriz de rotación, para todo $y \in \mathbb{R}^d$ se tiene $|Ay| = |y|$ y entonces, como f es una función radial tenemos $f(Ay) = f(y)$ de donde podemos escribir

$$\mathcal{F}(f)(\xi_2) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y\cdot\xi_1} f(y)dy = \mathcal{F}(f)(\xi_1).$$

■

3.3. Convolución

Por la desigualdad de Young sabemos que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y de esta manera podemos estudiar su transformación de Fourier $\mathcal{F}(f * g)$.

Proposición 5 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$.*

Prueba. Por la expresión (1) y usando el teorema de Fubini podemos escribir directamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(y)g(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi + 2\pi i y\cdot\xi - 2\pi i y\cdot\xi} f(y)g(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left[e^{-2\pi i y\cdot\xi}f(y)\right]\left[e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}g(x-y)\right]dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} g(x-y)dx\right)dy = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi).
\end{aligned}$$

■

Observamos que la transformación de Fourier "cambia" el producto de convolución de dos funciones en una multiplicación puntual de las transformaciones de Fourier de estas funciones.

3.4. Continuidad

Otra propiedad interesante de la transformación de Fourier es que envía funciones que sólo son integrables en funciones continuas.

Proposición 6 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces la función $\mathcal{F}(f)$ es uniformemente continua.*

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$, se quiere probar que existe $\delta > 0$ tal que si $|\xi - \eta| < \delta$ entonces $|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f)(\eta)| < \varepsilon$. Estudiemos la cantidad $|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f)(\eta)|$. Usando la expresión (1), para $R > 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f)(\eta)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}||f(x)|dx = \int_{|x|>R} |e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}||f(x)|dx \\
&\quad + \int_{|x|\leq R} |e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}||f(x)|dx = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

y entonces se trata de mostrar que $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ y $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para la integral I_1, como $|e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}| \leq |e^{-2\pi i x\cdot\xi}| + |e^{-2\pi i x\cdot\eta}| \leq 2$ entonces tenemos $I_1 \leq 2\displaystyle\int_{|x|>R} |f(x)|dx$. Además, como $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el teorema de convergencia dominada sabemos que $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{|x|>R}|f(x)|dx = 0$ y entonces podemos fijar $R > 0$ suficientemente grande de suerte que $\displaystyle\int_{|x|>R}|f(x)|dx < \varepsilon$ y de esta manera podemos escribir $I_1 \leq 2\displaystyle\int_{|x|>R}|f(x)|dx < \varepsilon$, de donde $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para la integral I_2 necesitamos estudiar un poco más en detalle la cantidad $|e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}|$ donde escribimos

$$\begin{aligned}
|e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}| &= |\cos(2\pi x\cdot\xi) - i\sin(2\pi x\cdot\xi) - \cos(2\pi x\cdot\eta) + i\sin(2\pi x\cdot\eta)| \leq |\cos(2\pi x\cdot\xi) - \cos(2\pi x\cdot\xi)| \\
&\quad + |\sin(2\pi x\cdot\xi) - \sin(2\pi x\cdot\eta)|.
\end{aligned}$$

Recordemos ahora que las funciones cos y sin son uniformemente continuas y entonces dada la cantidad $\dfrac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^1}} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|2\pi x\cdot\xi - 2\pi x\cdot\eta| < \delta_1$ entonces podemos escribir

$$|\cos(2\pi x\cdot\xi) - \cos(2\pi x\cdot\xi)| + |\sin(2\pi x\cdot\xi) - \sin(2\pi x\cdot\eta)| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^1}} + \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^1}} = \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1}}. \tag{5}$$

Así, fijando $\delta = \frac{\delta_1}{2\pi R}$, si $|\xi - \eta| < \delta$ entonces, como $|x| < R$ se tiene

$$|2\pi x \cdot \xi - 2\pi x \cdot \eta| \leq 2\pi |x||\xi - \eta| \leq 2\pi R|\xi - \eta| < \delta_1,$$

y tenemos a nuestra disposición la estimación (5) que reemplazamos en la integral I_2 para obtener

$$I_2 = \int_{|x|\leq R} |e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\eta}||f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1}} \left(\int_{|x|\leq R} |f(x)|dx \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

■

3.5. Derivación

Estudiamos ahora cómo se comporta la transformación de Fourier respecto a la derivación y para ello, en esta sección, enunciaremos el resultado en el marco de las funciones de test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. El hecho de trabajar con las funciones de test se debe principalmente a dos razones:

- Para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, por el punto 2) del Teorema 7 de la Lección 1 y para todo multi-indice $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ se tiene $\partial^a \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por lo que su transformación de Fourier $\mathcal{F}(\partial^a \varphi)$ está bien definida.
- Para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, sabemos por definición que φ es a soporte compacto en $\mathbb{R}^d$ y por lo tanto todas las integraciones por partes que haremos más adelante están bien justificadas.

Proposición 7 *Sean $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ y $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice. Entonces:*

1) $\mathcal{F}(\partial^a \varphi)(\xi) = (2\pi i \xi)^a \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ y

2) $\partial^a \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^a \varphi)(\xi)$.

Prueba.

1) Usando la expresión (1) e integración por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial^a \varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \partial^a \varphi(x)dx = (-1)^{[a]} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^a (e^{-2\pi i x\cdot\xi})\varphi(x)dx = (-1)^{[a]} \int_{\mathbb{R}^d} (-2\pi i \xi)^a e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)dx \\
&= = (-1)^{[a]} (-2\pi i \xi)^a \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)dx = (2\pi i \xi)^a \mathcal{F}(\varphi)(\xi).
\end{aligned}$$

2) Para empezar tomemos el multi-indice $a = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ que tiene 1 en la $j-$ésima componente y 0 en el resto de componentes, es decir, $\partial^a = \partial_j$. Notando e_j el $j-$ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$ y usando la expresión (1) escribimos

$$\begin{aligned}
\partial_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(\xi + he_j) - \mathcal{F}(\varphi)(\xi)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot(\xi + he_j)} \varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)dx \right) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{e^{-2\pi i x\cdot(\xi+he_j)} - e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{h} \right) \varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Entonces, como $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{e^{-2\pi i x\cdot(\xi+he_j)} - e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{h} = \partial_{\xi_j}(e^{-2\pi i x\cdot\xi}) = -2\pi i x_j e^{-ix\cdot\xi}$, usando el teorema de convergencia dominada en la integral precedente podemos escribir

$$\partial_j \mathcal{F}(\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(-2\pi i x_j e^{-2\pi i x\cdot\xi} \right) \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(-2\pi i x_j \varphi(x))dx = \mathcal{F}((-2\pi i x_j \varphi))(\xi).$$

Finalmente, si tomamos ahora $a = (a_1, \cdots, a_d)$ un multi-indice cualquiera, la identidad $\partial^a \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^a \varphi\right)(\xi)$ se sigue por recurrencia. ■

Observación 1

i) En el punto 1) *de la proposición anterior observamos que la transformación de Fourier "cambia" la derivada* ∂^a *por la multiplicación con el polinomio* $(2\pi i\xi)^a$.

ii) Esta es una de la propiedades más importantes de la transformación de Fourier pues nos permite estudiar la regularidad de una función a través del estudio del decrecimiento de su transformación de Fourier.

En efecto, por la Proposición 1 sabemos que $\mathcal{F}(\partial^a\varphi) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pero, sabemos además que $\mathcal{F}(\partial^a\varphi) = (2\pi i\xi)^a\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ y por lo tanto tenemos $(2\pi i\xi)^a\mathcal{F}(\varphi)(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Podemos ver que $\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ debe decrecer (al infinito) al menos como $\dfrac{1}{\xi^a}$. Así, mientras más regular es una función más rápido decrece su transformación de Fourier.

El operador Laplaciano

Otra interesante consecuencia de la Proposición 7 es el estudio del operador Laplaciano Δ definido como $\Delta\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2\varphi(x)$. Por el punto 1) de la Proposición 7 vemos sin problema que se tiene

$$\mathcal{F}(-\Delta\varphi)(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\mathcal{F}(\varphi)(\xi). \tag{6}$$

En este punto nos detendremos muy rápidamente para hacer un corto comentario sobre la importancia de esta identidad. En efecto, la identidad aquí arriba nos permite introducir de manera simple un operador de gran utilidad en el análisis armónico: el operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ (con $s \in \mathbb{R}$). De esta manera, motivados por (6), podemos dar una primera definición simple de la acción del operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ sobre una funcion de test φ mediante su transformación de Fourier:

$$\mathcal{F}((-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi)(\xi) = 4\pi^2|\xi|^s\mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

El operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ nos permite estudiar la regularidad *fraccionaria* de una función y es la herramienta de base para la definición de los espacios de Sobolev los cuales a su vez juegan un rol importante en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, el estudio del operador Laplaciano fraccionario y de los espacios de Sobolev es un vasto material que está totalmente fuera de los objetivos de este curso por lo que cerraremos aquí este corto paréntesis.

Volviendo a nuestro curso, usaremos la identidad (6) para estudiar otra propiedad de la transformación de Fourier de una función integrable.

3.6. Decrecimiento al infinito

Proposición 8 *(Lema de Riemann - Lebesgue). Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *Entonces* $|\mathcal{F}(f)(\xi)| \longrightarrow 0$ *cuando* $|\xi| \longrightarrow +\infty$.

Prueba. Primero, como $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y como el espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces para $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|f-\varphi\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

Luego, por la Proposición 1 sabemos que $\|\mathcal{F}(f)-\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^\infty} \leq \|f-\varphi\|_{L^1}$ y entonces se tiene $\|\mathcal{F}(f)-\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ y de esta manera, para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ podemos escribir

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(\varphi)(\xi)| + |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(\varphi)\|_{L^\infty} + |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \varepsilon + |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)|. \tag{7}$$

Estudiemos ahora el término $|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)|$. Como $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ por el punto 2 del Teorema 7 de la Lección 1 sabemos que $\Delta\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y entonces por la Proposición 1 escribimos

$$|\mathcal{F}(\Delta\varphi)(\xi)| \leq \|\mathcal{F}(\Delta\varphi)\|_{L^\infty} \leq \|\Delta\varphi\|_{L^1}.$$

Pero, por la expresión (6) sabemos que $\mathcal{F}(\Delta\varphi)(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$, en donde, por abuso de notación escribiremos $\mathcal{F}(\Delta\varphi)(\xi) = |\xi|^2\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ y entonces, por la desigualdad precedente se tiene $|\xi|^2\mathcal{F}(\varphi)(\xi) \leq \|\Delta\varphi\|_{L^1}$, y así tenemos

$$|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \frac{\|\Delta\varphi\|_{L^1}}{|\xi|^2}.$$

Finalmente, volviendo a (7) podemos escribir $|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \varepsilon + \dfrac{\|\Delta\varphi\|_{L^1}}{|\xi|^2}$ de donde se sigue el resultado al hacer tender primero $|\xi| \longrightarrow +\infty$ y luego $\varepsilon \longrightarrow 0$. ■

4. La Transformación de Fourier inversa

Hasta ahora hemos realizado el siguiente ejercicio: dada una función una función $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (o en particular una función de test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$) tomamos su transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ y estudiamos algunas de sus principales propiedades. Nos preguntamos ahora si es posible realizar el proceso inverso, es decir, a partir de la transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ volver a la función f. Para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 3 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformacion de Fourier inversa de f, notada por $\mathcal{F}^{-1}(f)$, se define como: para todo $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)d\xi. \tag{8}$$

Directamente de la formula (8) observamos que para $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ se tiene $|e^{2\pi i x\cdot\xi}| \leq 1$ y por lo tanto siguiendo las mismas lineas de la Proposicion 1 tenemos:

Proposición 9 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $\mathcal{F}^{-1}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y se tiene $\|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. Además, $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ es un operador lineal y acotado.*

De esta manera, la función $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}^d$ cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Tenemos además la siguiente observación.

Observación 2 *De la definición de la función $\mathcal{F}(f)(\xi)$ dada por la formula (1) y la definición de la función $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$ dada por la formula (8) se tiene:*

$$\widetilde{\mathcal{F}(f)}(x) = \mathcal{F}(f)(-x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(-x)\cdot\xi} f(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(f)(x). \tag{9}$$

Observamos entonces que la transformación de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$ no es más que la reflexión de la transformacion de Fourier $\widetilde{\mathcal{F}(f)}(x)$: $\mathcal{F}(f)(-x)$.

4.1. Teorema de inversión de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

Una vez que hemos definido la transformación de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}(f)$, queremos estudiar su relación con la transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$. El siguiente resultado es conocido como la fórmula de inversión de Fourier.

Teorema 1 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces se tiene la igualdad $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Antes de demostrar este teorema conviene hacer las siguientes observaciones:

Observación 3

i) *La igualdad $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$ justifica el nombre de transformación de Fourier inversa para la función $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$ definida en (8). En efecto, vemos que para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ si tomamos su transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ y si $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces aplicado ahora la transformación $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ volvemos a la función f.*

ii) *La hipótesis $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es muy importante para poder escribir $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))$. En efecto, para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sabemos por la Proposición 1 que $\mathcal{F}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, pero, si no tenemos la hipótesis adicional $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces no podemos asegurar que la función $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$ esté bien definida.*

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 *Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ y la función $\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ que vale 1 sobre el intervalo $[-1,1]$ y vale 0 fuera de este intervalo. Se tiene evidentemente que $\mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$. Calculando su transformación de Fourier se tiene $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]})(\xi) = \dfrac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$, pero, esta función no pertenece $L^1(\mathbb{R})$.*

En efecto, la identidad $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]})(\xi) = \dfrac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ se sigue inmediatamente de la definción de la transformacióndé Fourier (1) y de la formula de Euler (2). Veamos ahora que la función $\dfrac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ no pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. Notemos para empezar que esta función es par por lo se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin(2\pi\xi)|}{|\pi\xi|} d\xi = 2\int_{\xi\geq 0} \frac{|\sin(2\pi\xi)|}{\pi\xi} d\xi.$$

Pero, sabemos que la función $|\sin(2\pi\xi)|$ es una función periódica que oscila entre 0 y 1 y entonces no aporta nada para que la integral a la izquierda aquí arriba sea convergente. Por otro lado, la función $\dfrac{1}{\pi\xi}$ tampoco es integrable sobre el intervalo $]0,+\infty[$ por lo que la integral $2\displaystyle\int_{\xi\geq 0} \frac{|\sin(2\pi\xi)|}{\pi\xi} d\xi$ diverge.

Pasamos ahora a la demostración del Teorema 1 para lo cual necesitamos dos herramientas previas.

Proposición 10 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(x)g(x)dx$.*

Prueba. Notemos para empezar que como $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces por la Proposición 1 sabemos que $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y de esta manera por la desigualdad de Hölder las dos integrales aquí arriba son convergentes.

Ahora, para probar esta identidad, por la definición de la transformación de Fourier (1) y por el teorema de Fibini podemos escribir directamente:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi y\cdot x} g(y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(x)g(y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y\cdot x} f(x)dx\right) g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(x)g(x)dy.
\end{aligned}$$

■

Proposición 11 *Sea h la función definida en (3). Para todo $\varepsilon > 0$ definimos $h_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n} h\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. Entonces, para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene $h_\varepsilon * f \longrightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.*

Esta proposición será demostrada en el anexo al final de esta lección. Por ahora supondremos esta proposición verdadera.

Demostración del Teorema 1

Empezamos por mostrar la identidad $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ y para ello mostraremos que para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$.

Estudiemos la cantidad $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi$. Sabemos que la función $h(\varepsilon\xi) = e^{-\pi|\varepsilon\xi|^2}$ converge a 1 puntualmente para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y además, como $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por el teorema de convergencia dominada podemos escribir

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-\pi|\varepsilon\xi|^2}\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi.$$

Notando $g_\varepsilon(\xi) = e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{-\pi|\varepsilon\xi|^2}$ en la ultima expresión escribimos

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(\xi)\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi,$$

y por la Proposición 10 tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(g)_\varepsilon(y)f(y)dy.$$

Pero, por la identidad (4) y por los puntos 2) y 3) de la Proposición 3 tenemos $\mathcal{F}(g)_\varepsilon(y) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}e^{-\pi\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2} = h_\varepsilon(x-y)$ y por lo tanto podemos escribir, para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} h_\varepsilon * f(x). \tag{10}$$

Por otro lado, por la Proposición 11 sabemos que $h_\varepsilon * f \longrightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y entonces por el punto 1) de Teorema 6 de la Lección 1 escribimos, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} h_\varepsilon * f(x). \tag{11}$$

De esta manera, por (10) y (11), para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ podemos escribir $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \displaystyle\lim_{k \longrightarrow +\infty} h_{\varepsilon_k} * f(x) = f(x)$.

Finalmente, como para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene $f(x) - \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = 0$ entonces escribimos directamente $\|f - \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))\|_{L^1} = 0$ y por lo tanto $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Mostremos ahora la identidad $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$. Por la Observación 2 se tiene $\mathcal{F}^{-1}(f) = \widetilde{\mathcal{F}(f)}$ y entonces

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{F}(f)}). \tag{12}$$

Por otro lado, por el punto 3) de la Proposición 3, para $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sabemos que $\mathcal{F}(\widetilde{g}) = \widetilde{\mathcal{F}(g)}$ y tomando $g = \mathcal{F}(f)$ obtenemos $\mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{F}(f)} = \widetilde{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)})$. De esta manera por (12) podemos escribir

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \widetilde{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))}.$$

Finalmente, en el término a la derecha de esta igualdad, nuevamente por la Observación (2) se tiene $\widetilde{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ de donde escribimos $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$. ■

4.2. Principales propiedades de la transformación de Fourier inversa

La identidad (2) nos permite probar fácilmente que la transformación de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}(f)$ definida por la formula (8) satisface propiedades análogas a las propiedades de la transformación de Fourier $\mathcal{F}(f)$ estudiadas en las secciones precedentes. En la siguiente proposición listamos todas estas propiedades.

Proposición 12 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Su transformación de inversa $\mathcal{F}^{-1}(f)$ satisface:*

1) ***Traslación;*** *Para todo $y \in \mathbb{R}^d$ se tiene:*

   1.1) $\mathcal{F}^{-1}(f(\cdot - y)) = e^{2\pi i x\cdot y}\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$.

   1.2) $\mathcal{F}^{-1}(f)(\cdot - y)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x\cdot y} f)(x)$.

2) ***Dilatación.*** *Para todo $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}^{-1}(f(\varepsilon\cdot))(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^d}\mathcal{F}^{-1}(f)\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.*

3) ***Reflexión.*** $\widetilde{\mathcal{F}^{-1}(f)}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{f})(x)$.

4) ***Convolución.*** $\mathcal{F}^{-1}(f * g)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x)\mathcal{F}^{-1}(g)(x)$.

5) ***Continuidad.*** *La función $\mathcal{F}^{-1}(f)$ es uniformemente continua.*

6) ***Decrecimiento al infinito.*** $|\mathcal{F}^{-1}(f)(x)| \longrightarrow 0$ *cuando* $|x| \longrightarrow +\infty$.

7) ***Derivación:*** *Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y para todo $a \in \mathbb{N}^d$ multi-indice se tiene:*

   7.1) $\mathcal{F}^{-1}(\partial^a \varphi)(x) = (2\pi i x)^a \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)$.

   7.2) $\partial^a \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = -\mathcal{F}^{-1}((-2\pi i x)^a \varphi)(x)$.

8) *para todo $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}^{-1}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}(f)(x)g(x)dx$.

Para finalizar esta sección estudiamos otra relación existente entre la transformación de Fourier y su transformación inversa la cual nos será útil en la siguiente lección.

Empecemos fijando la siguiente notación: para una función $f(x)$ a valores en $\mathbb{C}$ notaremos por $\overline{f}(x)$ su conjugado complejo, es decir, si $f(x) = Re(f(x)) + iIm(f(x))$, donde $Re(f(x)) \in \mathbb{R}$ e $Im(f(x)) \in \mathbb{R}$ denota la parte real e imaginaria respectivamente, entonces $\overline{f}(x) = Re(f(x)) - iIm(f(x))$. Si además $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por la identidad precedente se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x)dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx}.$$

Esta igualdad nos permite probar la siguiente proposición.

Proposición 13 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\mathcal{F}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathcal{F}^{-1}(f)}$ y $\mathcal{F}^{-1}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathcal{F}(f)}$.*

Prueba. Mostremos la primera identidad. Por la definición de la transformación de Fourier (1) y de su transformación inversa (8) escribimos directamente:

$$\mathcal{F}(\overline{f})(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\overline{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e^{2\pi i x\cdot\xi} f(x)}dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx} = \overline{\mathcal{F}^{-1}(f)}(\xi).$$

La prueba de la segundad identidad sigue las misma lineas. ■

Vemos entonces que la transformación de Fourier del conjugado complejo de una función es igual al conjugado complejo de su transformación inversa.

Anexo: prueba de la Proposición 11

En primer lugar verificaremos que para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene $\|h_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_{L^1} \longrightarrow 0$. En efecto, en el Lema 2 de la Lección 4 mostraremos que

$$\|h_\varepsilon\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(y)dy = 1, \tag{13}$$

y suponiendo ahora esta identidad podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} h_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(y)\varphi(x-y)dy - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(y)\varphi(x-y)dy - \varphi(x)\int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(y)(\varphi(x-y)-\varphi(x))dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} h\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)[\varphi(x-y)-\varphi(x)]dy, \end{aligned}$$

de donde, con el cambio de variable $w = \dfrac{y}{\varepsilon}$ se tiene

$$h_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(w)(\varphi(x-\varepsilon w)-\varphi(x))dw.$$

Ahora, como φ es una función continua se tiene $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varphi(x-\varepsilon w)-\varphi(x)) = 0$ y de esta manera, por el teorema de convergencia dominada tenemos

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}(h_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} h(w)(\varphi(x-\varepsilon w)-\varphi(x))dw = 0.$$

Así, siempre por el teorema de convergencia dominada se tiene

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\|h_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_{L^1} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} |h_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)|dx = 0,$$

y de esta manera $h_\varepsilon * \varphi$ converge a φ en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Mostremos ahora que esta convergencia se verifica para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Como el espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^d)$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\delta > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|f - \varphi\|_{L^1} \leq \delta$.

Luego, por la desigualdad triangular podemos escribir

$$\|h_\varepsilon * f - f\|_{L^1} \leq \|h_\varepsilon * f - h_\varepsilon * \varphi\|_{L^1} + \|h_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_{L^1} + \|\varphi - f\|_{L^1}. \tag{14}$$

Pero, en el primer término a la derecha, por la desigualdad de Hölder y por (13) se tiene

$$\|h_\varepsilon * f - h_\varepsilon * \varphi\|_{L^1} \leq \|h_\varepsilon\|_{L^1}\|f - \varphi\|_{L^1} \leq \|f - \varphi\|_{L^1},$$

y como $\|f - \varphi\|_{L^1} \leq \delta$ entonces en (14) podemos escribir

$$\|h_\varepsilon * f - f\|_{L^1} \leq 2\delta + \|h_\varepsilon * \varphi - \varphi\|_{L^1},$$

de donde, al hacer tender $\varepsilon \longrightarrow 0$ y luego $\delta \longrightarrow 0$ se tiene que $h_\varepsilon * f$ converge a f en $L^1(\mathbb{R}^d)$. ■