Lección n°1: Herramientas de base

USFQ, septiembre 2017

Índice

1. Introducción

En esta lección haremos un corto resumen de las herramientas de base que utilizaremos a lo largo de las lecciones posteriores: los espacios de Lebesgue.

Algunas notaciones

En todo este curso introductorio a la transformación de Fourier trabajaremos sobre el espacio $\mathbb{R}^d$, donde el entero positivo d es su diemensión y donde:

- para dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \cdot y = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ denota el producto escalar usual y $|x| = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$ denota la norma euclidiana.
- Consideraremos siempre a $\mathbb{R}^d$ como un espacio medido: $(\mathbb{R}^d, Bor(\mathbb{R}^d), dx)$, donde $Bor(\mathbb{R}^d)$ es la sigma-álgebra boreliana y dx es la medida de Lebesgue.

2. Espacios de Lebesgue

Definición 1 *(Espacio de Lebesgue) Sea $p \in [1, +\infty]$. El espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ se define como*

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \ \textit{es medible y} \ \|f\|_{L^p} < +\infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \textit{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, & \textit{si } p = +\infty. \end{cases}$$

- Para $1 \leq p \leq +\infty$, los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ son espacios de Banach con la norma $\| \cdot \|_{L^p}$.
- Para $1 < p < +\infty$ son espacios reflexivos y se tiene $(L^p(\mathbb{R}^d))' = L^q(\mathbb{R}^d)$ donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

A continuación enunciamos los resultados que utilizaremos constantemente en las lecciones posteriores.

2.1. Dos teoremas clásicos en el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$

Teorema 1 *(Convergencia dominada) Sea* $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *una familia de funciones en* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$*. Si:*

1) para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $f_\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$ *cuando* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *y*

2) existe $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$ *y para casi todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *se tiene* $|f_\varepsilon(x)| \leq g(x)$,

entonces $\displaystyle\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$

Teorema 2 *(Teorema de Fubini) Sea* $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función medible. Si:*

1) la función $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy$ *pertenece a* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *y*

2) la función $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx$ *pertenece a* $L^1(\mathbb{R}^d)$,

entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *y se tiene* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x,y)dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy\right)dx.$

2.2. Desigualdad de Hölder

Teorema 3 *Sean* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *y sean* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$*. Si* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ *entones* $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *y se tiene* $\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.

2.3. Desigualdad de Interpolación

Teorema 4 *Sean* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ *y* $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$*. Entonces, para todo* $1 \leq p \leq +\infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1} + \dfrac{1-\theta}{p_2}$*, donde* $\theta \in [0,1]$*, se tiene* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}$.

2.4. Convolución y desigualdad de Young

Definición 2 *(Convolución) Sean* $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *dos funciones medibles. El producto de convolución entre* f *y* g*, notado por la función* $f * g$*, se define de la siguiente manera: para todo* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

Teorema 5 *(Desigualdad de Young) Sean* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$*. Si* $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ *entonces* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *y se tiene* $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.

2.5. Convergencia

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$ (donde $1 \leq p \leq +\infty$) y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Recordemos que $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$ si se tiene $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$.

Teorema 6 *Si la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* f *en* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *entonces:*

1) *Existe una subsucesión* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que, para casi todo* $x \in \mathbb{R}^d$, $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$.

2) *Además, existe una función* $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *tal que, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y para casi todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *se tiene* $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$.

En el punto 1) de este teorema vemos si la suceción $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función f en $L^p(\mathbb{R}^d)$ entonces, casi todo punto $x \in \mathbb{R}^d$ la subsucesión $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, pero, por abuso de notación, escribiremos $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

2.6. El espacio de la funciones de test

Introducimos rápidamente el espacio de las funciones de test el cual nos será de gran utilidad. Para empezar, conviene fijar algunas notaciones y definiciones.

(A) **Multi-indices.** Un multi-indice es un vector $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ cuyas componentes son números naturales. Notaremos por $[a] = a_1 + \cdots + a_n \geq 0$ su tamaño.

- Para un multi-indice $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ y una función φ suficientemente regular, la expresión $\partial^a \varphi$ denota la derivada $\partial_1^{a_1} \cdots \partial_d^{a_d} \varphi$ y $[a]$ nos indica el orden total de derivación de $\partial^a \varphi$.
- Por otro lado, para un multi-indice $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ y $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ definimos la cantidad $x^a = x_1^{a_1} \times \cdots \times x_d^{a_d} \in \mathbb{R}$.

(B) **Funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$.** Decimos que la función $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si es continua y para todo multi-indice a, la función $\partial^a \varphi$ existe y es continua.

Vemos entonces que la función φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si es infinitamente derivable y todas sus derivadas parciales son funciones continuas.

(C) **Soporte de una función**. Sea $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos su soporte, notado por *sop*(φ), como *sop*$(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \neq 0\}}$, donde la linea en encima de este conjunto denota su clausura en $\mathbb{R}^d$.

Vemos de esta manera que *sop*(φ) es el más pequeño conjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ donde $\varphi \neq 0$ y además, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ que no pertenece a *sop*(φ) se tiene $\varphi(x) = 0$.

Definición 3 *(Funciones de test) Una función* $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *se dice función de test si* φ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y además sop*(φ) *es compacto en* $\mathbb{R}^d$. *Notaremos por* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *el espacio de las funciones de test.*

Un ejemplo clásico de una función de test es el siguiente:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-|x|^2}{1-|x|^2}} & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Enunciamos ahora las principales propiedades de las funciones de test que utilizaremos después.

Teorema 7 *(Funciones de test y espacios de Lebesgue)*

1) *Para* $1 \leq p \leq +\infty$ *se tiene* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

2) *Para todo* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *y para todo multi-indice* $a \in \mathbb{N}^n$ *se tiene* $\partial^a \varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$.

3) *Para* $1 \leq p < +\infty$, *el espacio* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^d)$: *para todo* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *existe una suceción* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones en* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $\varphi_n \longrightarrow f$ *en* $L^p(\mathbb{R}^d)$.