Lección n°5: Sobre la unicidad de las soluciones estacionarias: algunos teoremas de tipo Liouville

EPN & USFQ Septiembre 2018

Índice

1. Introducción

En la lección anterior introdujimos las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias

$$-\Delta\vec{U} = -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}P + \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0,$$

y mostramos un resultado general de existencia de soluciones $(\vec{U}, P)$ en el marco de los espacios de Sobolev. De manera más precisa, en el Teorema 1 de la lección anterior mostramos que si consideramos una fuerza $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ entonces existe al menos una solución $(\vec{U}, P) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ de estas ecuaciones. Sin embargo, es importante insistir que este resultado no nos proporciona ninguna información adicional sobre la *unicidad* de esta solución y esta pregunta, en el estado actual de nuestros conocimientos, está completamente abierta.

Dado que la respuesta a esta pregunta está fuera del alcance de nuestros conocimientos nos planteamos entonces el siguiente problema: si en las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias aquí arriba consideramos ahora una fuerza nula: $\vec{f} = 0$ entonces estas ecuaciones se escriben como:

$$-\Delta\vec{U} = -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}P, \quad div(\vec{U}) = 0, \tag{1}$$

y aquí podemos observar que el par $\vec{U} = 0$ y $P = 0$ es siempre una solución de estas ecuaciones. Nos preguntamos entonces si esta solución trivial es la única solución para estas ecuaciones.

El objetivo de esta lección es estudiar más en detalle este problema que también es conocido como *problema de Liouville para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias.*

2. El problema de Liouville para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias

Antes de enunciar de manera precisa el problema de Liouville para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (1) es necesario fijar nuestro marco de trabajo y para ello tenemos la siguiente definición.

Definición 1 (Soluciones débiles) *Una solución débil de las ecuaciones (1) es un par $(\vec{U}, P)$, donde $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, que verifica estas ecuaciones en el sentido de las distribuciones.*

Es interesante notar que esta definición de soluciones débiles es una definición general en el sentido que requerimos unicamente que la velocidad $\vec{U}$ sea un campo de vectores localmente cuadrado integrable mientras que la presión P es una distribución y por lo tanto puede ser un objeto matemático muy general.

Expliquemos un poco más en detalle por qué requerimos la información $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Recodemos que por el Lema 1 dado en la página 5 de la lección N° 4, como se tiene la información $div(\vec{U}) = 0$ entonces en el término no lineal de las ecuaciones (1) podemos escribir

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = div(\vec{U} \otimes \vec{U}),$$

y entonces la información $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ nos permite mostrar que este término está bien definido en el sentido de las distribuciones. En efecto, como $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ entonces se tiene $\vec{U} \otimes \vec{U} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y luego $div(\vec{U} \otimes \vec{U}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

Ahora que hemos fijado el marco de trabajo dado por el espacio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ queremos saber si la solución trivial $\vec{U} = 0$ y $P = 0$ es la única solucion de la ecuaciones (1) e indiquemos desde ya que la respuesta a esta pregunta es *negativa*: en las siguientes lineas daremos un ejemplo concreto de un par $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ que verifican las ecuaciones (1) y que no se trata de la solución trivial.

En efecto, consideremos la función $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue: para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2. \tag{2}$$

Ahora, a partir de esta función definimos las funciones $\vec{U}$, P de la siguiente manera:

$$\vec{U}(x) = \vec{\nabla}\psi(x) \quad \text{y} \quad P(x) = -\frac{1}{2}|\vec{U}(x)|^2. \tag{3}$$

Observemos en primer lugar que se tiene $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. En efecto, por las formulas (2) y (3) se tiene $\vec{U}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -2x_3)$, y entonces para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene la estimación $|\vec{U}(x)| \approx |x|$ de donde se sigue $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Por otro lado, la propiedad $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ se sigue directamente la definición de la función $P(x)$ dada en la segunda identidad de la formula (3).

Luego se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1 *El par $(\vec{U}, P)$ definido en la identidad (3) verifica las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (1).*

Prueba. Observemos en primer lugar que por la identidad (3) se tiene $\vec{U} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y además $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Vamos ahora a mostrar que el par $(\vec{U}, P)$ verifica las ecuaciones (1).

Por la identidad (2) tenemos $\Delta\psi = 0$ y entonces podemos escribir

$$\Delta\vec{U} = \Delta(\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla}(\Delta\psi) = 0.$$

Luego, usando el calculo vectorial tenemos la identidad

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \frac{1}{2}|U|^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U},$$

y como $\vec{U} = \vec{\nabla}\psi$ entonces se obtiene $\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\psi) = 0$, y de esta manera podemos escribir

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \frac{1}{2}|U|^2.$$

Una vez que disponemos de estas identidades y además, como se tiene $P = -\frac{1}{2}|U|^2$ entonces podemos escribir

$$-\Delta\vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}P = \frac{1}{2}|U|^2 - \frac{1}{2}|U|^2 = 0.$$

Finalmente, siempre por la identidad (3) podemos deducir la propiedad $div(\vec{U})=0$. ■

Observamos entonces que el par de funciones $(\vec{U},P)$ definido en la identidad (3) es un ejemplo concreto de una solución de las ecuaciones (1) que no es la solución trivial y por lo tanto:

$\Rightarrow$ En el marco del espacio funcional $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ no se tiene la unicidad de la solución trivial $\vec{U}=0$ y $P=0$.

Este ejemplo nos permite formular de manera precisa el siguiente problema de Liouville para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias dadas en la ecuación (1):

Problema 1 *Encontrar un espacio funcional $E\subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ tal que si $(\vec{U},P)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ es una solución de las ecuaciones (1) y si $\vec{U}\in E$ entonces se tiene $\vec{U}=0$.*

Es muy importante recordar que la velocidad $\vec{U}$ y la presión P están siempre relacionadas por la siguiente expresión:

$$P=\frac{1}{-\Delta}\left(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})\right),$$

ver la identidad (13) de la página 5 de la Lección N°4; y así, en el Problema 1 observamos que es suficiente dar una hipótesis suplementaria sobre la velocidad: $\vec{U}\in E$, para obtener la identidad $\vec{U}=0$ y luego por esta relación entre $\vec{U}$ y P se tiene inmediatamente la identidad $P=0$.

Ahora que hemos planteando el Problema 1 es natural preguntarse cómo encontrar el espacio $E\subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para poder deducir la identidad $\vec{U}=0$. Veremos a continuación que las estimaciones *a priori* que realizamos en la lección anterior (ver la Sección 2 de la Lección N°4) nos proporcionan buena información sobre el espacio E buscado.

En efecto, recordemos rápidamente que las estimaciones *a priori* (también conocidas como estimaciones de energía) consisten en multiplicar la ecuación (1) por la velocidad $\vec{U}$, luego integrar en variable espacial para obtener la siguiente identidad formal:

$$\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta\vec{U})\cdot\vec{U}dx=\int_{\mathbb{R}^3}(-(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})\cdot\vec{U}dx+\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}P)\cdot\vec{U}dx, \tag{4}$$

y luego, por las identidades formales dadas en la formulas (5), (6) y (7) de la pagina 3 de la Lección N°4 escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta\vec{U})\cdot\vec{U}dx=\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2dx,$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^3}(-(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})\cdot\vec{U}dx=0 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}P)\cdot\vec{U}dx=0, \tag{5}$$

respectivamente. En este punto es importante insistir que por el momento estas identidades no tienen ninguna justificación rigurosa pero si suponemos por un momento estas identidades verdaderas entonces por la identidad (4) escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2dx=0. \tag{6}$$

Finalmente recordemos que por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev se tiene la estimación

$$\|\vec{U}\|_{L^6}\leq c\|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|_{L^2},$$

y entonces por la identidad anterior escribimos

$$\|\vec{U}\|_{L^6}\leq c\|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|_{L^2}=0. \tag{7}$$

Estas estimaciones formales nos proporcionan la siguiente información: volviendo a las identidades en la ecuación (5) podemos observar que buscamos hipótesis suplementarias sobre la velocidad $\vec{U}$: $\vec{U}\in E$, que nos permitan justificar estas identidades para luego poder escribir la identidad (6) y entonces por la estimación (7) podremos concluir que $\|\vec{U}\|_{L^6} = 0$ de donde se sigue la identidad $\vec{U} = 0$.

Observaremos ahora que para dar un sentido riguroso a las identidades dada en la ecuación (5) necesitamos que la velocidad $\vec{U}$ *decrezca suficientemente rápido al infinito* y esta propiedad puede ser caracterizada por medio de los espacios de Lebesgue.

Lema 1 *Sea $(\vec{U}, P) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ una solución de las ecuaciones (1). Si $\vec{U} \in L^4(\mathbb{R}^3)$ entonces se tienen las identidades dadas en la ecuación (5).*

Prueba. Empecemos por mostrar que las integrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \Big((-\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\Big)\cdot\vec{U}dx$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}P)\cdot\vec{U}dx$ están bien definidas y para ello mostraremos que se tiene $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, $\vec{\nabla}P \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ y además $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

En efecto, como $\vec{U} \in L^4(\mathbb{R}^3)$ entonces por las desigualdades de Hölder se tiene $\vec{U}\otimes\vec{U} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y luego $div(\vec{U}\otimes\vec{U}) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Pero, por el Lema 1 de la página 5 de la Lección N°4 se tiene la identidad $div(\vec{U}\otimes\vec{U}) = (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$ y entonces obtenemos $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Por otro lado, como se tiene la identidad $P = \dfrac{1}{-\Delta}\Big(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})\Big)$ y como $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ entonces tenemos $P \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y luego $\vec{\nabla}P \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Con las informaciones $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{\nabla}P \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ y como la velocidad $\vec{U}$ y la presión P verifican la ecuación

$$-\Delta\vec{U} = -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}P,$$

tenemos $-\Delta\vec{U} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ de donde se sigue $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

Con estas informaciones podemos se tiene $\langle -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}, \vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} < +\infty$ y $\langle \vec{\nabla}P, \vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} < +\infty$, pero recordemos que como se tiene $|\pm 1| \leq \frac{3}{2}$ (donde 3 es la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$) entonces podemos escribir

$$\langle -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}, \vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3}\Big(-(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\Big)\cdot\vec{U}dx \quad \text{y} \quad \langle \vec{\nabla}P, \vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3}\Big(\vec{\nabla}P\Big)\cdot\vec{U}dx,$$

y entonces las integrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\Big((-\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\Big)\cdot\vec{U}dx$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}P)\cdot\vec{U}dx$ están bien definidas.

Finalmente, siguiendo los mismos cálculos realizados en las identidades (6) y (7) de la página 3 de la Lección N°4 se tienen las identidades dadas en la ecuación (5). ■

Con la ayuda de este lema podemos demostrar ahora un primer resultado sobre el Problema 1 en el marco del espacio de Lebesgue $L^4(\mathbb{R}^3)$.

Proposición 2 *Sea $(\vec{U}, P) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ una solución de las ecuaciones (1). Si $\vec{U} \in L^4(\mathbb{R}^3)$ entonces se tiene $\vec{U} = 0$ y $P = 0$.*

Prueba. Como $\vec{U} \in L^4(\mathbb{R}^3)$ entonces por el Lema 1 se tienen las identidades dada en la ecuación (5) y por lo tanto podemos escribir la identidad (6). La identidad $\vec{U} = 0$, y consecuentemente la identidad $P = 0$, se sigue de la identidad (6) y de la estimación (7). ■

Motivados por este primer resultado nos interesamos en resolver el Problema 1 en el marco de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$. De manera más precisa, queremos estudiar otros posibles valores del parámetro de integración $p \in [1, +\infty]$ con los cuales podamos obtener resultados similares al resultado obtenido en la Proposición 2.

3. Algunos resultados en los espacios de Lebesgue

En esta sección mostramos que es posible resolver el Problema 1 en el marco del espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ para los valores del parámetro de integración $p \in [3, \frac{9}{2}]$. Para ello, siguiendo las ideas expuestas en la sección anterior se trata de utilizar la informacion $\vec{U} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, con $p \in [3, \frac{9}{2}]$, para obtener la identidad $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx = 0$ a partir de la cual se puede deducir la identidad deseada $\vec{U} = 0$. Procediendo de esta manera se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea $(\vec{U}, P) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (1). Si $\vec{U} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p \in [3, \frac{9}{2}]$ entonces se tiene $\vec{U} = 0$ y $P = 0$.*

Demostración. Supongamos que la solución $\vec{U}$ verifica $\vec{U} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p \in [3, \frac{9}{2}]$. Vamos a mostrar la identidad $\vec{U} = 0$ y para ello seguiremos las ideas de las estimaciones *a priori* (ver la ecuación (4)) pero en un marco más técnico que nos permita justificar todos los cálculos.

Comenzamos por introducir la siguiente función de truncatura: sea $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(x) = 1$ si $|x| < \frac{1}{2}$ y $\theta(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Sea $R > 1$, definimos la función $\theta_R(x)$ como $\theta_R(x) = \theta\left(\frac{x}{R}\right)$ y podemos observar que se tiene $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$ y $\theta_R(x) = 0$ si $|x| \geq R$.

Multiplicamos la ecuación (1) por la función $\theta_R \vec{U}$, luego integramos sobre la bola $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ y obtenemos la identidad

$$\int_{B_R} \left(-\Delta \vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla} P\right) \cdot \theta_R \vec{U} dx = 0.$$

En este punto es importante señalar que como $\vec{U} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p \in [3, \frac{9}{3}]$ entonces se tiene $\vec{U} \in L^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y con esta información se puede mostrar que se tiene $\vec{U} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. La prueba de esta propiedad es bastante técnica y está fuera de los objetivos de este curso por lo que asumiremos la información $\vec{U} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ (para más referencias ver por ejemplo el Teorema X,1,1, página 658, del libro "*An introduction to the mathematical theory of Navier-Stokes equations: Steady-State problems*" de G. Galdi). Así, con esta información podemos asegurar que cada término en la identidad precedente está bien definido y además es suficientemente regular por lo que, haciendo integraciones por partes, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \theta_R |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx &= \int_{B_R} \theta_R \Delta \left(\frac{|\vec{U}|^2}{2}\right) dx - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{B_R} \partial_j \left(U_j \partial_j \left(\frac{U_i^2}{2}\right)\right) \theta_R dx - \sum_{i=1}^{3} \int_{B_R} (\partial_i P) \theta_R U_i dx \\
&= \int_{B_R} \theta_R \Delta \left(\frac{|\vec{U}|^2}{2}\right) dx - \int_{B_R} \theta_R \left[div \left(\left(\frac{|\vec{U}|^2}{2} + P\right) \vec{U}\right)\right] dx \\
&= \int_{B_R} \Delta \theta_R \frac{|\vec{U}|^2}{2} dx + \int_{B_R} \vec{\nabla} \theta_R \cdot \left(\left(\frac{|\vec{U}|^2}{2} + P\right) \vec{U}\right) dx.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$ entonces se tiene

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx \leq \int_{B_R} \theta_R |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx,$$

y por la identidad precedente obtenemos la estimación

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx \leq \int_{B_R} \Delta \theta_R \frac{|\vec{U}|^2}{2} dx + \int_{B_R} \vec{\nabla} \theta_R \cdot \left(\left(\frac{|\vec{U}|^2}{2} + P\right) \vec{U}\right) dx = I_1(R) + I_2(R), \tag{8}$$

y ahora vamos a mostrar que se tiene $\lim\limits_{R \longrightarrow +\infty} I_i(R) = 0$ para $i = 1, 2$.

Para el término $I_1(R)$, por las desigualdades de Hölder (con $\frac{1}{q}+\frac{2}{p}=1$) podemos escribir

$$I_1(R)\leq \left(\int_{B_R}|\Delta\theta_R|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_R}|\vec{U}|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\leq \left(\int_{B_R}|\Delta\theta_R|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\|\vec{U}\|^2_{L^p}.$$

Además, como $\theta_R(x)=\theta\left(\frac{x}{R}\right)$ entonces se tiene

$$\left(\int_{B_R}|\Delta\theta_R|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=R^{\frac{3}{q}-2}\|\Delta\theta\|_{L^q(B_1)},$$

y como $\frac{1}{q}+\frac{2}{p}=1$ entonces escribimos

$$I_1(R)\leq R^{1-\frac{6}{p}}\|\Delta\theta\|_{L^q(B_1)}\|\vec{U}\|^2_{L^p}.$$

En esta estimación observamos que como $p\in[3,\frac{9}{2}]$ entonces se tiene $1-\frac{6}{p}\in[-1,-\frac{1}{3}]$ de donde se sigue $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow+\infty} I_1(R)=0$.

Estudiemos ahora el término $I_2(R)$. Comenzamos por observar que como $\theta_R(x)=1$ si $|x|<\frac{R}{2}$ y $\theta_R(x)=0$ si $|x|\geq R$ entonces se tiene $supp\left(\vec{\nabla}\theta_R\right)\subset\{x\in\mathbb{R}^3:\frac{R}{2}<|x|<R\}$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}I_2(R) &= \int_{B_R}\vec{\nabla}\theta_R\cdot\left(\left(\frac{|\vec{U}|^2}{2}+P\right)\vec{U}\right)dx=\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}\vec{\nabla}\theta_R\cdot\left(\left(\frac{|\vec{U}|^2}{2}+P\right)\vec{U}\right)dx\\ &\leq \int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|\vec{\nabla}\theta_R||\vec{U}|^3dx+\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|\vec{\nabla}\theta_R||P||\vec{U}|dx\\ &= (I_2)_a(R)+(I_2)_b(R),\end{aligned}$$

donde, para estudiar los términos $(I_2)_a(R)$ y $(I_2)_b(R)$ seguiremos esencialmente las mismas lineas en el estudio del término $I_1(R)$. En efecto, para el término $(I_2)_a(R)$, siempre por las desigualdades de Hölder con $\dfrac{1}{r}+\dfrac{3}{p}=1$, y por la definición de la función θ_R tenemos

$$\begin{aligned}(I_2)_a(R) &\leq \left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|\vec{\nabla}\theta_R|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|\vec{U}|^p dx\right)^{\frac{3}{p}}\\ &\leq R^{\frac{3}{r}-1}\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^r\left(\frac{1}{2}<|x|<1\right)}\|\vec{U}\|^3_{L^p\left(\frac{R}{2}<|x|<R\right)}\leq R^{2-\frac{9}{p}}\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^r}\|\vec{U}\|^3_{L^p\left(\frac{R}{2}<|x|<R\right)}.\end{aligned}$$

Así, como $p\in[3,\frac{9}{2}]$ entonces se tiene $2-\frac{9}{p}\in[-1,0]$ y como $R>1$ entonces obtenemos $R^{2-\frac{9}{p}}\leq 1$ y por la estimación precedente podemos escribir

$$(I_2)_a(R)\leq\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^r}\|\vec{U}\|^3_{L^p(\frac{R}{2}<|x|<R)},$$

donde, dado que $\vec{U}\in L^p(\mathbb{R}^3)$ se sigue $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow+\infty}(I_2)_a(R)=0$.

Para estudiar el término $(I_2)_b(R)$, recordemos en primer lugar que la presion P se escribe como

$$P=\frac{1}{-\Delta}\left(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})\right)=\frac{1}{-\Delta}\left(div(div(\vec{U}\otimes\vec{U}))\right),$$

y entonces, como la velocidad $\vec{U}$ pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^3)$ entonces por la desigualdades de Hölder se tiene $\vec{U}\otimes\vec{U}\in L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^3)$ y además, como el operador $\dfrac{1}{-\Delta}(div(div(\cdot)))$ es continuo en los espacios de Lebesgue L^q con $1<q<+\infty$ entonces se sigue que la presión P pertenece al espacio $L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Con esta información y usando las desigualdades de Hölder podemos escribir

$$(I_2)_b(R)\leq\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|\vec{\nabla}\theta_R|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|P|^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}|\vec{U}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

y siguiendo las mismas estimaciones realizadas aquí arriba se tiene $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty}(I_2)_a(R)=0$. De esta manera se tiene $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} I_2(R)=0$.

Ahora que disponemos de la información $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} I_i(R)=0$ para $i=1,2$; volvemos a la estimación (8) donde tomando el limite cuando $R\longrightarrow+\infty$ se tiene $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2dx=0$ y de esta manera obtenemos la identidad buscada $\vec{U}=0$. Finalmente escribimos la presión P como $P=\dfrac{1}{-\Delta}(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}))$ para obtener la identidad $P=0$.
$\blacksquare$

Para finalizar esta lección es interesante hacer los siguientes comentarios y observaciones sobre el problema de Liouville para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias planeado en el Problema 1.

1) El primer resultado sobre la unicidad de la solución trivial $\vec{U}=0$ y $P=0$ de las ecuaciones (1) en el marco de los espacios de Lebesgue fue obtenido por G. Galdi en el año 1994 en su libro "*An introduction to the mathematical theory of Navier-Stokes equations: Steady-State problems*" (ver el Teorema X,9,5 de este libro) y en este resultado el autor muestra que la información $\vec{U}\in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$ es una condición suficiente para mostrar la identidad $\vec{U}=0$.

   En este marco podemos observar que el Teorema 1 es una generalización de este resultado pues del parámetro de integración $p=\frac{9}{2}$ pasamos a cualquier parámetro de integración $p\in[3,\frac{9}{2}]$.

2) Es natural preguntarse preguntarse si se puede mostrar un teorema similar al Teorema 1 pero considerando ahora los valores del parámetro de integración $p\in[1,3[$ o $p\in]\frac{9}{2},+\infty]$. En el estado actual de nuestros conocimientos se tienen las siguientes respuestas a esta pregunta.

   - El problema de Liouville en el marco del espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p\in[1,\frac{3}{2}]$ es todavía un problema abierto.

   - Cuando consideramos los valores del parámetro de integración $p\in]\frac{3}{2},3[$ entonces se puede mostrar un teorema similar el Teorema 1 pero con la hipótesis adicional de que la velocidad $\vec{U}$ es suficientemente *regular*. Este es un resultado reciente de G. Seregin del año 2017, y la demostración de este resultado es mucho más técnica que la del Teorema 1 pues esta demostración hace intervenir los espacios de Morrey que son generalizaciones de los espacios de Lebesgue.

   - Cuando consideramos los valores del parámetro de integración $p\in]\frac{9}{2},6[$, el autor de estas lecciones junto con Diego Chamorro y Pierre Gilles Lemarié-Rieusset mostraron también en el año 2017 el siguiente resultado:

     Teorema 2 *Sea $(\vec{U},P)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (1). Si $\vec{U}\in L^p(\mathbb{R}^3)\cap\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$ con $p\in]\frac{9}{2},6[$ entonces se tiene $\vec{U}=0$ y $P=0$.*

     Donde, como $\dfrac{3}{p}-\dfrac{3}{2}<0$ entonces el espacio de Besov homogéneo $\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$ puede ser caracterizado como el espacio de las distribuciones temperadas $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ que verifican

     $$\|f\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{3}{p})}\|h_t*f\|_{L^\infty}<+\infty,$$

     donde h_t denota siempre el núcleo del calor. Además, el espacio $\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$ es un espacio homogéneo de grado $\dfrac{3}{p}-\dfrac{3}{2}$. Un estudio mucho más detallado de los espacios de Besov está fuera de los objetivos de este curso por lo que no haremos más comentarios sobre estos espacios.

En este resultado podemos observar que la velocidad $\vec{U}$ pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^3)$, con $p \in]\frac{9}{2}, 6[$, pero esta información (en el estado actual de nuestros conocimientos) parece no ser suficiente para poder mostrar la identidad $\vec{U}=0$ y entonces necesitamos la hipótesis suplementaria $\vec{U} \in \dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$.

En este marco, recordemos que el espacio $L^p(\mathbb{R}^3)$ es un espacio homogéneo de grado $-\frac{3}{p}$ mientras que, como señalamos anteriormente, el espacio el espacio $\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$ es un espacio homogéneo de grado $\dfrac{3}{p}-\dfrac{3}{2}$. Observamos de esta manera que si suponemos $\vec{U} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, con $p \in]\frac{9}{2}, 6[$, entonces necesitamos añadir un segundo espacio funcional con homogeneidad diferente a la del espacio $L^p(\mathbb{R}^3)$: el espacio $\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$, para poder obtener la identidad $\vec{U}=0$.

Finalmente, si comparamos el Teorema 1 con el Teorema 2 es interesante observar que el espacio de Lebesgue $L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (considerado por G. Galdi) parece ser un espacio *limite* para resolver el problema de Liouville en los espacios de Lebesgue en el sentido que si consideramos valores del parámetro de integración p mayores a $\frac{9}{2}$ necesitamos hipótesis adicionales sobre el campo de velocidad, como se puede observar en el Teorema 2.

- Para el caso particular del parámetro de integración $p=6$, G. Seregin mostró en al año 2015 que si se tiene como hipótesis $\vec{U} \in L^6(\mathbb{R}^3)$ entonces para poder mostrar la identidad $\vec{U}=0$ es necesario considerar un segundo espacio funcional (siempre de homogeneidad diferente al la del espacio $L^6(\mathbb{R}^3)$ y que está dada por el valor $-\frac{1}{2}$) y este espacio funcional se trata del espacio $BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$ que es un espacio funcional de homogeneidad -1.
- Finalmente, en nuestros conocimientos actuales el problema de Liouville para los valores del parámetro de integración $p \in]6, +\infty]$ es un problema abierto.