Lección n°4: Soluciones fuertes-débiles

USFQ, septiembre 2016

Unicidad Fuerte-Débil

Con los resultados demostrados en las lecciones anteriores tenemos la situación siguiente:

- Por un lado, si aplicamos un argumento de punto fijo en un marco funcional adaptado, obtenemos soluciones únicas de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero su tiempo de existencia es muy pequeño y está relacionado con el tamaño del dato initial. Para datos iniciales grandes, no sabemos prolongar el tiempo de existencia de este tipo de soluciones.

- Por otro lado, disponemos de las soluciones débiles de Leray, que están definidas globalmente y cuyo tiempo de existencia no depende del tamaño del dato inicial. Pero el precio a pagar por este resultado de existencia global es la unicidad de las soluciones: obtenemos una familia de soluciones.

Lo que queremos estudiar aquí es si existe una diferencia entre las soluciones obtenidas por medio de un punto fijo y las soluciones obtenidas por el procedimiento de Leray. Evidentemente esta pregunta solo tiene sentido en el pequeño intervalo de tiempo en donde ambas soluciones existen.

Vamos a ver que en este pequeño intervalo común de existencia, estos dos tipos de soluciones coinciden, de donde se deduce que la *pérdida* de unicidad interviene al intentar prolongar las soluciones, es decir que aparece *después* del tiempo maximal de existencia de las soluciones *mild*.

Teorema 1 (Unidad Fuerte-Débil) *Sean* $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *con* $div(\vec{u}_0) = 0$ *y* $\vec{f} \in L^2\big([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\big)$ *dos datos iniciales. Si el problema de Navier-Stokes asociado a estos datos iniciales*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

admite una solución $\vec{u}_M$ *sur* $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ *tal que* $L^\infty\big([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0,T], H^2(\mathbb{R}^3)\big)$*, y si* $\vec{u}_L$ *es una solución de Leray sobre* $[0,T]\times\mathbb{R}^3$*, entonces sobre el intervalo de tiempo* $[0,T]$ *tenemos la identidad*

$$\vec{u}_M = \vec{u}_L.$$

Prueba. Consideremos $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M$ y entonces escribimos

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \|\vec{u}_L - \vec{u}_M\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 + \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M, \vec{u}_L\rangle_{L^2\times L^2} \\ &= \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M, \vec{w}\rangle_{L^2\times L^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

A partir de esta identidad, vamos a utilizar las informaciones que tenemos a la mano para poder aplicar el Lema de Grönwall y de esta mandera obtener $\vec{w} = 0$, *i.e.* que se tiene la unicidad buscada.

Nuestro punto de partida es la identidad siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds. \quad (2)$$

En efecto, tenemos $\vec{u}_M \in L^2_t H^2_x$, y entonces $\partial_t \vec{u}_M \in L^2_t H^{-1}_x$, además sabemos que $\vec{u}_L \in L^2_t H^1_x$, y entonces $\partial_t \vec{u}_L \in L^2_t H^{-2}_x$: esto muestra que todos los términos de la derecha de la expresión anterior están bien definidos. Por otro lado tenemos $\partial_t(\vec{u}_M \cdot \vec{u}_L) = \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L + \vec{u}_M \cdot \partial_t \vec{u}_L$ y por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t(\vec{u}_M \cdot \vec{u}_L)dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \partial_t \vec{u}_L dx \\
\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx &= \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1}\times H^1} + \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2\times H^{-2}},
\end{aligned}$$

de tal manera que integrando con respecto a la variable de tiempo obtenemos la expresión anterior.

Utilizamos ahora la definición $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M$ y aplicamos la identidad (2) al último término de (1) para obtener

$$\|\vec{w}(t,\cdot)\|^2_{L^2} = \|\vec{u}_L\|^2_{L^2} - \|\vec{u}_M\|^2_{L^2} - 2\left(\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds\right). \tag{3}$$

Vamos a estudiar cada uno de estos términos por separado.

- Para el término $\|\vec{u}_L\|^2_{L^2}$ utilizamos la desigualdad de energía de Leray:

$$\|\vec{u}_L(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_L\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds - 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|^2_{L^2} ds. \tag{4}$$

- Para el término $\|\vec{u}_M\|^2_{L^2}$, como tenemos un poco más de regularidad tenemos

$$\|\vec{u}_M(t,\cdot)\|^2_{L^2} = \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_M\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds - 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|^2_{L^2} ds. \tag{5}$$

- Para el término $\displaystyle\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds$, utilizamos la ecuación verificada por $\partial_t \vec{u}_M$. En efecto, tenemos $\partial_t \vec{u}_M = \nu\Delta \vec{u}_M - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M - \vec{\nabla} p + \vec{f}$, y entonces podemos escribir

$$\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds = \int_0^t \langle \nu\Delta \vec{u}_M - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds$$

$$= -\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w}\rangle_{L^2\times L^2} ds - \int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds. \tag{6}$$

- Finalemente, para el término $\displaystyle\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds$ utilizamos la relación $\partial_t \vec{w} = \nu\Delta \vec{w} - \mathbb{P}\big((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_L - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M\big)$ para obtener

$$\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds = \int_0^t \langle \vec{u}_M, \nu\Delta \vec{w} - \mathbb{P}\big((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_L - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M\big)\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds,$$

  pero como $\vec{u}_M$ y $\vec{u}_L$ son de divergencia cero tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds &= -\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w}\rangle_{L^2\times L^2} ds - \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_L\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds \\
&\quad + \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds.
\end{aligned} \tag{7}$$

De esta manera, con las expresiones (4) – (7) podemos regresar a la identidad (3) para escribir

$$\|\vec{w}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|^2_{L^2} ds + 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|^2_{L^2} ds + 4\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w}\rangle_{L^2\times L^2} ds$$

$$+2\int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M, \vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds + 2\int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_L\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds - 2\int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M\rangle_{H^2\times H^{-2}} ds.$$

Ahora, utilizando el hecho que $div(\vec{u}_M)=div(\vec{u}_L)=0$ tenemos las identidades

$$\langle(\vec{u}_M\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_M,\vec{w}\rangle_{H^{-1}\times H^1}=-\langle\vec{u}_M,(\vec{u}_M\cdot\vec{\nabla})\vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}},$$

y

$$\langle\vec{u}_M,(\vec{u}_L\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_M\rangle_{H^2\times H^{-2}}=\langle\vec{u}_M,(\vec{u}_M\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_M\rangle_{H^2\times H^{-2}}=0,$$

de manera que

$$\begin{aligned}\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad\leq\quad & -2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_L\|_{L^2}^2ds+2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_M\|_{L^2}^2ds+4\nu\int_0^t\langle\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_M,\vec{\nabla}\otimes\vec{w}\rangle_{L^2\times L^2}ds\\ & +2\int_0^t\langle\vec{u}_M,(\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}}ds.\end{aligned}$$

Utilizando el hecho que $\vec{w}=\vec{u}_L-\vec{u}_M$ en el tercer término de la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad\leq\quad & -2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_L\|_{L^2}^2ds-2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_M\|_{L^2}^2ds+4\nu\int_0^t\langle\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_M,\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_L\rangle_{L^2\times L^2}ds\\ & +2\int_0^t\langle\vec{u}_M,(\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}}ds,\end{aligned}$$

lo que nos da

$$\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2\leq-2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_{L^2}^2ds+2\int_0^t\langle\vec{u}_M,(\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}\rangle_{H^2\times H^{-2}}ds.$$

Ahora, hacemos la mayoración siguiente

$$\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2\leq-2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_{L^2}^2ds+2\int_0^t\|\vec{u}_M\|_{L^\infty}\|\vec{w}\|_{L^2}\|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}ds,$$

y con las desigualdades de Young obtenemos

$$\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2\leq-2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_{L^2}^2ds+\frac{1}{2\nu}\int_0^t\|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2\|\vec{w}\|_{L^2}^2ds+2\nu\int_0^t\|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2ds,$$

lo que nos permite escribir

$$\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2\leq\frac{1}{2\nu}\int_0^t\|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2\|\vec{w}\|_{L^2}^2ds,$$

para terminar basta aplicar el Lema de Grönwall puesto que tenemos la mayoración

$$\int_0^t\|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2\leq C\left(\|\vec{u}_M\|_{L^2(\dot{H}^1)}\|\vec{u}_M\|_{L^2(\dot{H}^2)}\right)^{1/2}<+\infty.$$

Hemos obtenido que $\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2=0$ lo que nos da la unicidad buscada. ■

Este teorema admite un corolario muy interesante.

Corolario 1 *Sean $\vec{u}_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{f}\in L^2\big([0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3)\big)\cap L^2\big([0,+\infty[,\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)\big)$. Entonces el problema de Navier-Stokes*

$$\partial_t\vec{u}=\nu\Delta\vec{u}+\mathbb{P}\big(\vec{f}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big),\quad div(\vec{u})=0,\qquad \vec{u}(0,\cdot)=\vec{u}_0,$$

admite una solución débil $\vec{u}$ definida sobre $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u}\in L^\infty\big([0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3)\big)\cap L^2\big([0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ que la desigualdad fuerte de Leray.

Además tenemos el comportamiento en el tiempo siguiente

$$\lim_{t\to+\infty}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}=0.$$

Prueba. Nuestro punto de partida es la obtención por regularización de una solución $\vec{u}$ que pertece al espacio $L^\infty\big([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ y que verifica la desigualdad de energía

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle f(s,\cdot), \vec{u}(s,\cdot)\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds.$$

Sabemos también, por el teorema de Fujita-Kato, que si $\vec{u}(t_0,\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\vec{f} \in L^2\big([t_0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([t_0,+\infty[, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)\big)$ y si además se tiene $\|\vec{u}(t_0,\cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} < \varepsilon_0\nu$ y $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1/2}} ds < \varepsilon_0^2\nu^3$, entonces el probleme de Navier-Stokes de datos iniciales $(\vec{u}(t_0,\cdot), \vec{f})$ admite una solución global $\vec{u}_M$ definida sobre $[t_0,+\infty[$ que pertenece al espacio $\mathcal{C}\big([t_0,+\infty[, H^1(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([t_0,+\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\big)$.

Ahora, dado que $\vec{u}$ pertenece al espacio $L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(\dot{H}_x^1)$, entonces por interpolación entre estos espacios tenemos $\vec{u} \in L_t^4(\dot{H}_x^{1/2})$. De esta manera el conjunto de tiempos t tales que $\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}_x^{1/2}} \geq \varepsilon_0\nu$ es de medida finita puesto que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 ds = 0,$$

y como el complementario del conjunto de puntos de Lebesgue de la aplicación $t \longmapsto \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}$ es de medida nula, existe un punto $t_0 > 0$ tal que

- $\|\vec{u}(t_0,\cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} < \varepsilon_0\nu$,
- $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 ds < \varepsilon_0^2\nu^3$,
- $\vec{u}$ es una solución de Leray sobre $[t_0,+\infty[$, en particular para todo $t \in]t_0,+\infty[$ tenemos la desigualdades

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu\int_{t_0}^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}(t_0,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\int_{t_0}^t \langle f(s,\cdot), \vec{u}(s,\cdot)\rangle_{H^{-1}\times H^1} ds.$$

Entonces, por el teorema de unicidad fuerte-débil, sabemos que $\vec{u}$ coincide sobre $[t_0,+\infty[$ con la solución $\vec{u}_M$ que pertenece al espacio $\mathcal{C}\big([t_0,+\infty[, H^1(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([t_0,+\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\big)$.

Entonces, para demostrar este corolario basta verificar que se tiene

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}_M(t,\cdot)\|_{L^2} = 0.$$

De esta manera, para $t_0 < \tau < t$ tenemos

$$\vec{u}_M(t,x) = h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau,x) - \int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\big(div(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)\big) ds + \int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}\big) ds,$$

y escribimos

$$\|\vec{u}_M(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau,\cdot)\|_{L^2} + \left\|\int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\big(div(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)\big) ds\right\|_{L^2} + \left\|\int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}\big) ds\right\|_{L^2},$$

y utilizando cálculos realizados en lecciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_M(t,\cdot)\|_{L^2} \quad &\leq \quad \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau,\cdot)\|_{L^2} + C_\nu\left(\int_\tau^t \|\mathbb{P}\big(div(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)\big)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds\right)^{1/2}\\ &\quad +C_\nu\left(\int_\tau^t \|\mathbb{P}(\vec{f}(s,\cdot)) ds\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds\right)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau,\cdot)\|_{L^2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\vec{u}_M\|^2_{\dot{H}^1}\|\vec{u}_M\|^2_{\dot{H}^{1/2}}ds\right)^{1/2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\vec{f}(s,\cdot)ds\|^2_{\dot{H}^{-1}}ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau,\cdot)\|_{L^2} + C_\nu \sup_{s>t_0}\|\vec{u}_M(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} \left(\int_\tau^t \|\vec{u}_M\|^2_{\dot{H}^1}ds\right)^{1/2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\vec{f}(s,\cdot)ds\|^2_{\dot{H}^{-1}}ds\right)^{1/2}.$$

De esta manera obtenemos

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\vec{u}_M(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \sup_{s>t_0}\|\vec{u}_M(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} \left(\int_\tau^{+\infty} \|\vec{u}_M\|^2_{\dot{H}^1}ds\right)^{1/2} + C_\nu \left(\int_\tau^{+\infty} \|\vec{f}(s,\cdot)ds\|^2_{\dot{H}^{-1}}ds\right)^{1/2},$$

para terminar basta hacer tender τ hacia $+\infty$ para obtener

$$\lim_{t\to+\infty}\|\vec{u}_M(t,\cdot)\|_{L^2} = 0,$$

lo que termina la prueba del corolario. ■