



Para $\Omega =]a, b[\times B(x_0, \rho_0)$, donde $0 < a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $0 < \rho$, el teorema de regularidad local de Serrin nos dice que si $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = 0, \quad \text{div}(\vec{u}) = 0, \quad \text{sobre } \Omega, \quad (1)$$

donde $p \in D'(\Omega)$ y si además

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega)$$

entonces

$$\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1(Q) \cap L_t^2 H_x^2(Q),$$

donde $Q =]c, b[\times B(x_0, r) \subset \Omega$, para todo $c \in]a, b[$ y $r \in]0, \rho[$.

En el teorema de regularidad local de Serrin observamos dos hechos importantes:

- Obtenemos regularidad local con respecto a la variable espacial en las soluciones débiles \vec{u} de la ecuación de Navier-Stokes. En efecto, se tiene que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ sobre $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ y bajo la hipótesis $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega)$ se obtiene que $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 H_x^2$ sobre $Q =]c, b[\times B(x_0, r) \subset \Omega$.
- La presión $p(t, x)$ es tal que $p \in D'(\Omega)$ y por lo tanto es un objeto general.

Ejercicio 1 — La hipótesis sobre la velocidad

El objetivo de este ejercicio es mostrar que la hipótesis sobre la velocidad $\vec{u}: \vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega)$, es una condición que no se deduce del hecho que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ y por lo tanto es una hipótesis *adicional* que se exige en el teorema de regularidad local de Serrin.

1. Empezaremos por mostrar la siguiente desigualdad de interpolación clásica entre espacios de Lebesgue. Sean entonces dos espacios de Lebesgue $L^{p_1}(A), L^{p_2}(A)$ con $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ y donde $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Para $\theta \in [0, 1]$ sea $p \in [1, +\infty[$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$. Usando la desigualdad de Hölder mostrar la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^\theta \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}. \quad (2)$$

Vamos a considerar dos casos:

- a) Cuando $p_2 < +\infty$.

Sea entonces $\theta \in [0, 1]$ y $p \in [1, +\infty[$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$. La idea consiste en escribir

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)p}$$

de donde tenemos que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_A |f(x)|^p dx = \int_A |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)p} dx.$$

Ahora, para $\alpha, \beta \in [1, +\infty[$ tales que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder a la última integral aquí arriba tenemos que

$$\int_A |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)p} dx \leq \left(\int_A |f(x)|^{\alpha \theta p} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_A |f(x)|^{\beta (1-\theta)p} dx \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Puesto que queremos obtener las normas $\|f\|_{L^{p_1}}$ y $\|f\|_{L^{p_2}}$ vamos a fijar los valores de los parámetros α y β como

$$\alpha = \frac{p_1}{\theta p} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{p_2}{(1-\theta)p}$$

de donde tenemos que $p_1 = \alpha \theta p$ y $p_2 = \beta (1-\theta)p$ respectivamente. Además, se tiene que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\theta p}{p_1} + \frac{(1-\theta)p}{p_2} = 1,$$

dado que $\frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} = \frac{1}{p}$; y de esta manera la condición de la desigualdad de Hölder se verifica bien para estos valores de los parámetros α y β dados aquí arriba.

De esta forma obtenemos las desigualdad

$$|f(x)|_{L^p}^p \leq \left(\int_A |f(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{\theta p}{p_1}} \left(\int_A |f(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_2}}$$

de donde al tomar la potencia $\frac{1}{p}$ tenemos la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^\theta \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}.$$

b) Cuando $p_2 = +\infty$.

En este caso tenemos que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} = \frac{\theta}{p_1}$ de donde vemos que si $p_1 = +\infty$ entonces se tiene que $p = +\infty$ y es inmediato que $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}^\theta \|f\|_{L^\infty}^{1-\theta}$ por lo que nos concentraremos en el caso cuando $p_1 < +\infty$. En efecto, escribiendo

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)p}$$

se tiene que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_A |f(x)|^p dx = \int_A |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)p} dx \leq \left(\sup_{x \in A} |f(x)|^{(1-\theta)p} \right) \left(\int_A |f(x)|^{\theta p} dx \right),$$

de donde, como $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1}$ entonces $p_1 = \theta p$ y así tenemos que

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \left(\sup_{x \in A} |f(x)|^{(1-\theta)p} \right) \left(\int_A |f(x)|^{p_1} dx \right) = \|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)p} \|f\|_{L^{p_1}}^{p_1}.$$

Finalmente al tomar la potencia $\frac{1}{p}$ obtenemos la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)} \|f\|_{L^{p_1}}^{\frac{p_1}{p}} = \|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)} \|f\|_{L^{p_1}}^\theta.$$

2. **Dado que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ mostrar que $\vec{u} \in L_t^p L_x^q$ donde $1 < p, q < +\infty$ verifican la relación $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$.**

En efecto, por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev se tiene que $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ y entonces $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1 \subset L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^6$. De esta manera obtenemos que

$$\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^6,$$

donde, puesto que casi todo tiempo $t > 0$ se tiene $\vec{u}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$, por la desigualdad de interpolación (2) se tiene que

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^q} \leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^2}^\theta \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^6}^{1-\theta},$$

con $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{6}$ donde θ es un parámetro tal que $\theta \in [0, 1]$. Ahora, sea $p \geq 1$ y al integrar en la variable de tiempo obtenemos que

$$\int_0^{+\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^q}^p dt \leq \int_0^{+\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^2}^{\theta p} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p} dt \leq \left(\sup_{t>0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^2}^{\theta p} \right) \left(\int_0^{+\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p} dt \right).$$

Queremos mostrar que el término a la derecha de la desigualdad aquí arriba es una cantidad finita en donde vemos que, como $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^6$ entonces $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2$ y de esta manera $\sup_{t>0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^2}^{\theta p} = \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\theta p} < +\infty$.

Por lo tanto debemos asegurar que la integral $\int_0^\infty \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p} dt$ es una cantidad finita. Para ello, dado que $\vec{u} \in L_t^2 L_x^6$ vemos que si fijamos el parámetro p tal que

$$(1-\theta)p = 2$$

entonces $\int_0^\infty \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p} dt = \int_0^\infty \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^6}^2 dt < +\infty$.

De esta forma obtenemos que si $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1 \subset L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^6$ entonces

$$\vec{u} \in L_t^p L_x^q$$

donde

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2}.$$

Con estas condiciones sobre los parámetros de integración p (en variable de tiempo) y q (en variable de espacio) mostramos fácilmente que p y q verifican entonces la relación

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}.$$

3. **Concluir que si $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ entonces no podemos deducir que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty$.**

Por el literal anterior sabemos que: como $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ entonces $\vec{u} \in L_t^p L_x^q$ con $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$. Esta es la relación que deben cumplir los parámetros de integración p y q no nos permite una gran flexibilidad respecto a los valores de p y q , en particular vemos que el caso que nos interesa cuando $p = q = +\infty$ no es posible pues estos valores particulares de p y q no verifican la condición $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$.

De esta manera observamos que, el marco general donde le velocidad \vec{u} pertenece al espacio $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ y las herramientas matemáticas que tenemos a nuestra disposición (las desigualdades de Hölder y de Hardy-Littlewood-Sobolev) no son suficientes para deducir la condición en el teorema de regularidad local de Serrin: $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty$; y por lo tanto es una hipótesis *adicional* que hacemos sobre la velocidad \vec{u} para estudiar su regularidad local.

Ejercicio 2 — El contra-ejemplo de Serrin

Puesto que el teorema de Serrin estudia la regularidad local de las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes con respecto a la variable espacial nos preguntamos si podemos obtener alguna información sobre la regularidad con respecto a la variable de tiempo. En este marco el contra-ejemplo de Serrin nos muestra que: si no tenemos un control sobre la presión $p(t, x)$ en la variable de tiempo t entonces no podemos obtener ningún control sobre la regularidad de la solución \vec{u} en la variable temporal. Para ello Serrin construyó un ejemplo explícito en donde podemos observar esta situación. En efecto, sea $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica, es decir, $\Delta\psi(x) = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \psi(x) = 0$, sea además $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos el campo vectorial

$$\vec{u}(t, x) = \alpha(t) \vec{\nabla} \psi(x).$$

1. **Mostrar que:**

(a) $\operatorname{div}(\vec{u})(t, x) = 0$.

En efecto, por la definición del campo de vectores $\vec{u}(t, x)$ aquí arriba y el hecho que $\Delta\psi(x) = 0$ tenemos que

$$\operatorname{div}(\vec{u})(t, x) = \alpha(t) \operatorname{div}(\vec{\nabla} \psi)(x) = \alpha(t) \Delta\psi(x) = 0.$$

(b) $\partial_t \vec{u}(t, x) = \left(\frac{d}{dt} \alpha(t)\right) \vec{\nabla} \psi(x)$.

De igual manera, dado que $\vec{u}(t, x) = \alpha(t) \vec{\nabla} \psi(x)$ es inmediato que $\partial_t \vec{u}(t, x) = \left(\frac{d}{dt} \alpha(t)\right) \vec{\nabla} \psi(x)$.

(c) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, x) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{u}(t, x)|^2$.

En este literal usaremos la siguiente identidad del cálculo de vectores

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{u}|^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u},$$

donde \wedge es el producto vectorial entre dos vectores de \mathbb{R}^3 .

En efecto, por esta identidad tenemos que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, x) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{u}(t, x)|^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t, x)) \wedge \vec{u}(t, x)$ y entonces debemos mostrar que $(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t, x)) \wedge \vec{u}(t, x) = 0$. Para ello basta observar que por la definición del campo de vectores $\vec{u}(t, x)$, $\vec{u}(t, x) = \alpha(t) \vec{\nabla} \psi(x)$, obtenemos que

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t, x) = \vec{\nabla} \wedge \left(\alpha(t) \vec{\nabla} \psi(x)\right) = \alpha(t) \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \psi\right)(x)\right) = 0$$

pues, por el cálculo básico de vectores sabemos que el rotacional de un campo gradiente es igual a cero, es decir, $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \psi\right) = 0$. De esta manera tenemos que $(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t, x)) \wedge \vec{u}(t, x) = 0$ y podemos concluir la identidad enunciada en este literal.

(d) $\Delta \vec{u}(t, x) = 0$.

Nuevamente por la definición del campo de vectores $\vec{u}(t, x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ y el hecho que $\Delta\psi(x) = 0$ tenemos directamente que

$$\Delta \vec{u}(t, x) = \Delta \left(\alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x) \right) = \alpha(t)\Delta \left(\vec{\nabla}\psi(x) \right) = \alpha(t)\vec{\nabla}(\Delta\psi(x)) = 0.$$

2. **Mostrar que si el término de presión $p(t, x)$ está dado por**

$$p(t, x) = -\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) - \frac{1}{2}|\vec{u}(t, x)|^2 \quad (3)$$

entonces $\vec{u}(t, x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (1).

En efecto, por el literal (a) del ejercicio anterior tenemos que $\text{div}(\vec{u}) = 0$ por lo que la condición de divergencia nula es verificada. Además, por los literales (b), (c) y (d) respectivamente tenemos que

$$\partial_t \vec{u}(t, x) + (\vec{u}(t, x) \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(t, x) - \Delta \vec{u}(t, x) + \vec{\nabla}p(t, x) = \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) \vec{\nabla}\psi(x) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}(t, x)|^2 + \vec{\nabla}p(t, x)$$

de donde, por la definición del término de presión $p(t, x)$ aquí arriba, al tomar el gradiente $\vec{\nabla}$, tenemos inmediatamente que

$$\left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) \vec{\nabla}\psi(x) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}(t, x)|^2 + \vec{\nabla}p(t, x) = 0$$

y de esta manera concluimos que

$$\partial_t \vec{u}(t, x) + (\vec{u}(t, x) \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(t, x) - \Delta \vec{u}(t, x) + \vec{\nabla}p(t, x) = 0.$$

Es decir, el campo de vectores $\vec{u}(t, x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ y el término de presión $p(t, x) = -\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) - \frac{1}{2}|\vec{u}(t, x)|^2$ son una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles (1).

3. **En la expresión del término de presión (3) escribir $\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) = p(t, x) - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\vec{u}(t, x)|^2$ y deducir que el control sobre la regularidad de la solución $\vec{u}(t, x)$ en variable temporal está dado por el control sobre la presión $p(t, x)$ en variable temporal.**

En efecto, en primer lugar por el literal (b) de la pregunta 1 tenemos que

$$\partial_t \vec{u}(t, x) = \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) \vec{\nabla}\psi(x)$$

de donde podemos observar que cualquier información sobre la derivada del campo de velocidades con respecto al tiempo, $\partial_t \vec{u}$, como su regularidad por ejemplo, recae sobre la regularidad de la cantidad $\frac{d}{dt}\alpha(t)$.

Por otro lado, por la definición del término de presión $p(t, x) = -\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) - \frac{1}{2}|\vec{u}(t, x)|^2$ tenemos que

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) = p(t, x) - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\vec{u}(t, x)|^2$$

donde podemos ver que si queremos controlar la regularidad de la cantidad $\frac{d}{dt}\alpha(t)$ debemos entonces controlar la regularidad del término de presión $p(t, x)$ en la variable temporal.

Concluimos de esta manera que, el control de la regularidad de $\partial_t \vec{u}(t, x)$ está dado por el control de la regularidad de $p(t, x)$ en variable de tiempo.