Ejercicios Lección n° 2: Soluciones mild de Fujita-Kato USFQ, otoño 2016

Ejercicio 1 — Soluciones mild y ecuacioens de Navier-Stokes

El objetivo de este ejercicio es mostrar que la formulación mild de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(s,x)ds \tag{1}$$

donde h_t es el núcleo del calor, $\vec{u}_0 \in H^1_x(\mathbb{R}^3)$ es el dato inicial (la velocidad del fluido en el tiempo $t=0$), $\mathbb{P}(\varphi) = \varphi - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}div(\varphi)$ es el proyector de Leray y $\vec{u} \in L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ es la velocidad; verifica las ecuaciones

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - \Delta\vec{u} = 0. \tag{2}$$

Para lo cual empezaremos por verificar algunas propiedades útiles del núcleo del calor h_t.

1. **Sea $\varphi(t,x)$ una función en la clase de Schwartz y $h_t(x)$ el núcleo del calor, consideremos la convolución entre estas dos funciones en variable espacial: $h_t * \varphi(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} h_t(x-y)\varphi(t,y)dy$. Usando la transformación de Fourier (en variable espacial) mostrar que:**

   (a) $\partial_t\,(h_t * \varphi) = \Delta(h_t*\varphi) + h_t * \partial_t\varphi$.

   En efecto, en primer lugar notaremos la transformación de Fourier (siempre con respecto a la variable espacial) de una función $f(t,x)$ por

   $$\mathcal{F}[f](t,\xi).$$

   De esta forma tenemos que

   $$\begin{aligned}\mathcal{F}[\partial_t(h_t*\varphi)](t,\xi) &= \partial_t(\mathcal{F}[h_t*\varphi])(t,\xi) = \partial_t(\mathcal{F}[h_t]\mathcal{F}[\varphi])(t,\xi)\\ &= (\partial_t\mathcal{F}[h_t](t,\xi))\mathcal{F}[\varphi](t,\xi) + \mathcal{F}[h_t](\xi)(\partial_t\mathcal{F}[\varphi](t,\xi)).\end{aligned} \tag{3}$$

   En este punto usamos el hecho que el núcleo del calor verifica la ecuación $\partial_t h_t = \Delta h_t$. Esto nos permite calcular fácilmente el término $(\partial_t\mathcal{F}[h_t](t,\xi))$ pues si en la ecuación anterior tomamos la transformación de Fourier (siempre con respecto a la variable espacial) obtenemos entonces que

   $$(\partial_t\mathcal{F}[h_t](t,\xi)) = \mathcal{F}[\Delta h_t](t,\xi). \tag{4}$$

   De este modo, reemplazando (4) en el último término de la ecuación (3) tenemos entonces que

   $$\mathcal{F}[\partial_t(h_t*\varphi)](t,\xi) = \mathcal{F}[\Delta h_t](t,\xi)\mathcal{F}[\varphi](t,\xi) + \mathcal{F}[h_t](\xi)(\partial_t\mathcal{F}[\varphi](t,\xi)).$$

   Ahora, tomando la transformación de Fourier inversa en esta última expresión obtenemos finalmente que

   $$\partial_t\,(h_t*\varphi) = \Delta(h_t*\varphi) + h_t*\partial_t\varphi.$$

   (b) $h_t * (h_{-t}*\varphi) = h_{-t}*(h_t*\varphi) = \varphi$.

   Siguiendo el mismo razonamiento que el literal anterior, al tomar la transformación de Fourier obtenemos que

   $$\mathcal{F}[h_t*(h_{-t}*\varphi)](t,\xi) = \mathcal{F}[h_t]\mathcal{F}[h_{-t}*\varphi](t,\xi) = \mathcal{F}[h_t]\mathcal{F}[h_{-t}]\mathcal{F}[\varphi](t,\xi) \tag{5}$$

Usamos ahora el hecho que la transformación de Fourier con respecto a la variable espacial del núcleo del calor está dada por

$$\mathcal{F}[h_t](\xi) = e^{-t|\xi|^2}, \tag{6}$$

de donde podemos observar que $\mathcal{F}[h_t]\mathcal{F}[h_{-t}](\xi) = e^{-t|\xi|^2}e^{t|\xi|^2} = 1$ y volviendo a la ecuación (5) obtenemos entonces la igualdad

$$\mathcal{F}[h_t * (h_{-t} * \varphi)](t, \xi) = \mathcal{F}[\varphi](t, \xi)$$

de donde al tomar la transformación de Fourier inversa tenemos que

$$h_t * (h_{-t} * \varphi) = \varphi.$$

La verificación de la otra identidad

$$h_t * (h_{-t} * \varphi) = \varphi$$

sigue el mismo razonamiento.

(c) $\displaystyle\int_0^t h_{(t-s)} * \varphi(s, x)ds = h_t * \left(\int_0^t h_{-s} * \varphi(s, x)ds\right).$

De la misma manera, al tomar la transformacion de Fourier con respecto a la variable espacial y utilizando la identidad (6) se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_0^t h_{(t-s)} * \varphi(s, x)ds\right](\xi) &= \int_0^t \mathcal{F}[h_{(t-s)} * \varphi(s, \cdot)](\xi)ds = \int_0^t \mathcal{F}[h_{t-s}](\xi)\mathcal{F}[\varphi](s, \xi)ds \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2}\mathcal{F}[\varphi](s, \xi)ds = e^{-t|\xi|}\int_0^t e^{s|\xi|^2}\mathcal{F}[\varphi](s, \xi)ds. \end{aligned}$$

Finalmente, al tomar la transformación de Fourier inversa en esta última expresión obtenemos la igualdad buscada

$$\int_0^t h_{(t-s)} * \varphi(s, x)ds = h_t * \left(\int_0^t h_{-s} * \varphi(s, x)ds\right).$$

2. **Mostrar que la formulación mild dada por la expresión (1) se escribe como**

$$\vec{u}(t, x) = h_t * \left(\vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x)ds\right).$$

En efecto, en el segundo término a la derecha de la formulación mild (1)por la propiedad (c) podemos escribir

$$\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x)ds = h_t * \left(\int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x)ds\right)$$

de donde obtenemos que

$$\vec{u}(t, x) = h_t * \left(\vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x)ds\right). \tag{7}$$

3. **En la expresión anterior calcular $\partial_t\vec{u}(t, x)$ y deducir que $\vec{u}(t, x)$ verifica formalmente las ecuaciones (2).**

Derivando la expresión (7) con respecto a la variable de tiempo t y utilizando el literal (a) de la Pregunta 1 tenemos que

$$\partial_t\vec{u}(t, x) = \Delta\left(h_t * \left(\vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x)ds\right)\right) + h_t * \partial_t\left(\vec{u}_0 - \int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(s, x)ds\right).$$

Además, por la identidad (7) podemos ver que el primer término a la derecha de la igualdad anterior corresponde precisamente a $\Delta\vec{u}(t,x)$ y tenemos entonces que

$$\partial_t\vec{u}(t,x) = \Delta\vec{u}(t,x) + h_t * \partial_t\left(\vec{u}_0 - \int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(s,x)ds\right).$$

Finalmente, en el segundo término a la derecha de esta igualdad tenemos que

$$h_t * \partial_t\left(\vec{u}_0 - \int_0^t h_{-s} * \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(s,x)ds\right) = -h_t * \Big(h_{-t} * \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\Big)$$

y por la propiedad (b) de la Pregunta 1 concluimos entonces que

$$-h_t * \Big(h_{-t} * \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\Big) = -\mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x).$$

De esta manera hemos probado que

$$\partial_t\vec{u}(t,x) = \Delta\vec{u}(t,x) - \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x),$$

es decir,

$$\partial_t\vec{u}(t,x) + \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x) - \Delta\vec{u}(t,x) = 0$$

y de esta manera la formulación mild dada por la expresion (1) verifica las ecuaciones de Navier-Stokes (2).

Criterios de explosión para las soluciones mild de Fujita-Kato

El objetivo de estos dos ejercicios es mostrar los criterios de explosión en tiempo para las soluciones mild (1) construidas en el teorema de Fujita-Kato (ver la Lección 2, Teorema 2). Empezaremos con algunas definiciones y notaciones: notaremos por

$$T_{max},$$

donde $0 < T_{max} \leq +\infty$, el tiempo *maximal* de existencia de la solución mild $\vec{u}$, es decir, para todo $0 < T < T_{max}$ se tiene que $\vec{u} \in L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ donde $\vec{u}$ está dada por la expresión (1)(con el dato inicial $\vec{u}_0 \in H^1_x(\mathbb{R}^3)$) y entonces por el Ejercicio 1 verifica las ecuaciones de Navier-Stokes (2).

Se tiene que $T_{max} \leq +\infty$ y en el estado actual de nuestro conocimiento sobre las ecuaciones de Navier-Stokes no podemos dar una información más precisa sobre T_{max}, es decir, no sabemos si $T_{max} < +\infty$ y por lo tanto el tiempo maximal de existencia de la solución $\vec{u}$ es finito o si bien $T_{max} = +\infty$ y la solución existe sobre el intervalo de tiempo $[0, +\infty[$. En este cuadro los criterios de explosión en tiempo para las soluciones mild de Fujita-Kato consiste en *suponer* que

$$T_{max} < +\infty,$$

es decir, *suponemos* que el tiempo maximal de existencia de la solución $\vec{u}$ es finito y por lo tanto no podemos construir dicha solución mas allá de este tiempo. Decimos entonces que tenemos una explosión (o "blow-up") de la solución en el tiempo T_{max} y queremos saber de qué forma se produce esta explosión.

Ejercicio 2 — Primer criterio de explosión

Se quiere mostrar que si $T_{max} < +\infty$ entonces $\sup\limits_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty$.

1. **Sea $T < T_{max}$ el tiempo de existencia de la solución mild $\vec{u}$ dado por el teorema de Fujita-Kato (ver Teorema 2, Lección 2). Tomando ahora el dato inicial $\vec{u}(T,\cdot)$ y $\delta > 0$ (suficientemente pequeño) construir una solución $\vec{u}$ sobre el intervalo $[T, T+\delta]$. Para ello considerar la formulación mild**

$$\vec{u}(t,x) = h_{(t-T)} * \vec{u}(T,x) - \int_T^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(s,x)ds \tag{8}$$

y

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{\left(8c^2\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}\right)^4}\right),$$

donde $c > 0$ es una contante.

En primer lugar comenzaremos por explicar más en detalle la formulación mild (8) aquí arriba. Una vez que hemos construido una solucion mild (1) de la ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio $L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, donde hemos tomado un dato inicial en el tiempo $t = 0$ dado por $\vec{u}_0 \in H^1_x(\mathbb{R}^3)$ y el tiempo de existencia $T > 0$ está dado por el teorema de Fujita-Kato (Teorema 2 de la Lección 2) queremos extender dicha solución hacia el intervalo de tiempo $[T, T+\delta[$ y para ello partimos ahora del dato inicial en el tiempo $t = T$ dado por $\vec{u}(T,\cdot) \in H^1_x(\mathbb{R}^3)$.

De esta manera, para construir una solución mild en el intervalo de tiempo $[T, T+\delta[$ seguiremos los mismos pasos vistos en la demostración del Teorema 2 de la Lección 2 del curso donde la herramienta de base es el principio de contracción de Picard (Teorema 1, lección 2).

En efecto, empezamos por fijar el espacio funcional donde queremos construir la solución mild (8) el cual está dado por

$$E = L^\infty([T, T+\delta], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([T, T+\delta], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$$

dotado de la norma

$$\|f\|_E = \|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + \|f\|_{L^2_t \dot{H}^2_x} = \sup_{T<t<T+\delta} (\|f(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\nabla f(t,\cdot)\|_{L^2}) + \left(\int_T^{T+\delta} \|\Delta f(t,\cdot)\|^2_{L^2} dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De esta forma, observando la formulación mild (8) arriba vemos que el campo de velocidades $\vec{u}(t,x)$ se escribe como una ecuación de punto fijo

$$\vec{u} = h(t-T) * \vec{u}(T,\cdot) + B(\vec{u},\vec{u}) \tag{9}$$

donde la forma bilineal $B(\vec{u},\vec{u})$ está dada por la expresión

$$B(\vec{u},\vec{u}) = -\int_T^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(s,x)ds$$

y para poder aplicar el principio de contracción de Picard y construir de esta manera una solución a la ecuación (9) $\vec{u} \in E$ debemos verificar dos cosas:

(a) $\|h(t-T) * \vec{u}(T,\cdot)\|_E \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}$ y

(b) $\|B(\vec{u},\vec{u})\|_E \leq C\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E$,

donde, como hemos visto en la demostracion del teorema de Fujita-Kato (Lección 2, Teorema 2) la constante C dependerá de la longitud del intervalo de tiempo donde construimos la solución $\vec{u}$, en nuestro caso dado que el intervalo de tiempo es $[T, T+\delta[$ la longitud de este intervalo es precisamente δ y por lo tanto la constante C dependerá de δ. De esta manera escribiremos $C = c(\delta)$.

Verifiquemos entonces los putos (a) y (b) aquí arriba.

(a) Por la defición de la norma $\|\cdot\|_E$ tenemos que

$$\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_E = \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t H^1_x} + \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_t \dot{H}^2_x}$$

donde: para el primer término a la derecha sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t H^1_x} & = & \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \\ & \leq & \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t L^2_x} + \delta^{\frac{1}{2}}\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}, \end{array}$$

donde, por el Lema 1 de la Lección 2 y el hecho que por definición $\delta \leq 1$ tenemos que

$$\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x}$$

y

$$\delta^{\frac{1}{2}}\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x}.$$

De esta manera obtenemos que

$$\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x} \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} \tag{10}$$

donde la constante $c>0$ es una constante numérica (de manera más precisa tenemos que c es igual a $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Ahora vamos a controlar el segundo término de la norma $\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_E$ dado por la expresión

$$\int_T^{T+\delta} \|\Delta(h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot))\|^2_{L^2} dt.$$

En efecto, por la igualdad de Plancherel y el teorema de Funibi tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_T^{T+\delta} \|\Delta(h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot))\|^2_{L^2} dt & = & \displaystyle\int_T^{T+\delta} \|\mathcal{F}\left[\Delta(h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot))\right]\|^2_{L^2} \\ & = & \displaystyle\int_T^{T+\delta}\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{-2(t-T)|\xi|^2}|\mathcal{F}[\vec{u}](T,\xi)|^2 d\xi dt \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\int_T^{T+\delta} |\xi|^2 e^{-2(t-T)|\xi|^2}|\mathcal{F}[\vec{u}](T,\xi)|^2 dt\, d\xi \\ & \leq & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_T^{\infty} |\xi|^2 e^{-2(t-T)|\xi|^2} dt\right)|\mathcal{F}[\vec{u}](T,\xi)|^2 d\xi. \end{array}$$

En esta última expresión obtenemos que

$$\int_T^\infty |\xi|^2 e^{-2(t-T)|\xi|^2} dt = \frac{1}{2}$$

y de esta manera obtenemos la desigualdad

$$\int_T^{T+\delta} \|\Delta(h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot))\|^2_{L^2} dt \leq \frac{1}{2}\|\vec{u}(T,\cdot)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}. \tag{11}$$

Finalmente, por la desigualdades (10) y (11) tenemos que

$$\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_E = \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} \tag{12}$$

lo que verifica en punto (a).

(b) Ahora vamos a mostrar la continuidad de la forma bilineal

$$\|B(\vec{u},\vec{u})\|_E \leq c(\delta)\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E$$

donde recodamos que $B(\vec{u},\vec{u})$ está dada por la expresión

$$B(\vec{u},\vec{u})(t,x) = -\int_T^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(s,x)ds.$$

Nuestro punto de partida es la siguiente desigualdad la cual es obtenida por el Lema 2 de la Lección 2:

$$\|B(\vec{u},\vec{u})\|_E = \|B(\vec{u},\vec{u})\|_{L^\infty_t H^1_x} + \|B(\vec{u},\vec{u})\|_{L^2_t \dot{H}^2_x} \leq c\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}.$$

Luego, queremos mostrar la desigualdad

$$\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq c(\delta)\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E$$

, con alguna constante que depende de δ, $c(\delta)>0$ y para ello usaremos las leyes de producto en los espacios de Sobolev (Lema 3 de la Leccińn 2) de donde para casi todo tiempo $t\in[T,T+\delta[$ obtenemos que

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq c\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}$$

de donde

$$\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} = \left(\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en la variable de tiempo) se tiene que

$$c\left(\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^4_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^4_{\dot{H}^1_x}\right)^{\frac{1}{4}} = c\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^1_x}.$$

De esta forma tenemos la desigualdad

$$\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq c\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^1_x}.$$

Ahora estudiaremos cada unos de los dos términos a la derecha. Para el primer término, $\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}$, por las desigualdad de interpolación ente espacios de Sobolev tenemos que

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} \leq c\|\vec{u}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^2_x}$$

y de esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^4_{L^4_t\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} &= \int_T^{T+\delta}\|\vec{u}\|^4_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}dt \leq c\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}dt \\ &\leq c\left(\sup_{T\leq t\leq T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\right)\left(\int_T^{T+\delta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}dt\right) = c\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t\dot{H}^1_x}\|\vec{u}\|^2_{L^2_t\dot{H}^2_x},\end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} \leq c\|\vec{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_t\dot{H}^1_x}\|\vec{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_t\dot{H}^2_x} \leq c\|\vec{u}\|_{L^\infty_t\dot{H}^1_x} + c\|\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^2_x} = c\|\vec{u}\|_E.$$

Estudiemos ahora el segundo término, $\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^1_x}$, donde obtenemos directamente que

$$\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^1_x} = \left(\int_T^{T+\delta} \|\vec{u}\|^4_{\dot{H}^1_x} dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\sup_{T\leq t\leq T+\delta} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\right)\left(\int_T^{T+\delta} dt\right)^{\frac{1}{4}} = \delta^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t\dot{H}^1_x} \leq \delta^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|_E.$$

Así obtenemos el control $\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x} \leq c\delta^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E$ y entonces

$$\|B(\vec{u},\vec{u})\|_E \leq \|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x} \leq c\delta^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|_E\,\|\vec{u}\|_E$$

donde la constante $c(\delta)$ está dada por $c(\delta) = c\delta^{\frac{1}{4}}$ con $c>0$ una constante numérica.

Una vez que hemos verificado los puntos (a) y (b) ahora vamos a mostrar la existencia de $\vec{u}\in E$ solución de la ecuación de punto fijo $\vec{u} = h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)+B(\vec{u},\vec{u})$. En efecto por el punto (a) sabemos que $\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_E \leq c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}$ y por el punto (b) sabemos que $\|B(\vec{u},\vec{u})\|_E \leq c\delta^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E$. De esta manera al tomar δ (la longitud del intervalo $[T,T+\delta]$) como

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{\left(8c^2\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}\right)^4}\right)$$

tenemos que

$$\left(4c\delta^{\frac{1}{4}}\right)\left(c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}\right) \leq \frac{1}{2}$$

y entonces obtenemos el control

$$4c\delta^{\frac{1}{4}}\|h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)\|_E \leq \left(4c\delta^{\frac{1}{4}}\right)\left(c\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}\right) \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Así, verificamos la condición del principio de contracción de Picard (ver Teorema 1, Lección 2) y entonces existe $\vec{u}\in E$ solución de la ecuación

$$\vec{u} = h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot)+B(\vec{u},\vec{u}) = h(t-T)*\vec{u}(T,\cdot) - \int_T^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(s,\cdot)ds$$

sobre el intervalo de tiempo $[T,T+\delta]$.

2. **De acuerdo a la definición de T_{max} deducir que $T+\delta<T_{max}$ y que esto sólo es posible si se tiene**

$$\lim_{T\longrightarrow T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty.$$

Recordemos rápidamente el panorama. Dado $\vec{u}_0\in H^1_x(\mathbb{R}^3)$ un dato inicial, por el teorema de Fujita-Kato (Teorema 2, Lección 2) sabemos que existe un tiempo $T>0$ y una solución mild a las ecuaciones de Navier-Stokes $\vec{u}(t,x)$ dada por la formulación (1) la cual está definida sobre el intervalo de tiempo $[0,T]$. Luego, tomando el dato inicial $\vec{u}(T,\cdot)\in H^1_x(\mathbb{R}^3)$ y para $\delta>0$ suficientemente pequeño $\delta = \min\left(1, \frac{1}{\left(8c^2\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}\right)^4}\right)$, en el ejercicio anterior construimos una solución mild $\vec{u}(t,x)$ sobre el intervalo de tiempo $[T,T+\delta]$ y de esta manera obtenemos una solución mild sobre el intervalo de tiempo $[0,T+\delta]$.

Por otro lado hemos supuesto que $T_{max}<+\infty$ es el tiempo *maximal* de existencia de la solución $\vec{u}(t,x)$ y de esta manera tenemos que $T+\delta<T_{max}$ de donde

$$\delta < T_{max}-T.$$

En esta expresión podemos observar que si el tiempo T se acerca por la izquierda al tiempo T_{max} (el tiempo donde hemos supuesto que se produce produce una explosión de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$) entonces necesariamente δ tiende hacia cero. Pero si volvemos a la definición de δ:

$$\delta = \text{mín}\left(1, \frac{1}{\left(8c^2\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}\right)^4}\right)$$

vemos que la única forma de que δ tienda a cero cuando $T \longrightarrow T_{max}$ es que

$$\lim_{T\longrightarrow T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty.$$

3. **Concluir entonces que** $\sup\limits_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty$**.**

   Como $\lim\limits_{T\longrightarrow T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty$ entonces $\sup\limits_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty$ y concluimos de esta manera que al *suponer* el tiempo maximal de existencia de la solución de la solución mild $\vec{u}$, T_{max}, un tiempo finito ($T_{max} < +\infty$) vemos que, en efecto, la solucón $\vec{u}$ no puede ser construida más allá del tiempo T_{max} pues se tiene que

$$\sup_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty,$$

   es decir, la norma $\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x}$ *explota* en el tiempo T_{max}.

Ejercicio 3 — Segundo criterio de explosión

Se quiere mostrar que si $T_{max} < +\infty$ entonces $\displaystyle\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt = +\infty$.

En el ejercicio anterior vimos que si $T_{max} < +\infty$ entonces $\sup\limits_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty$ lo que nos da una primera información sobre la explosión de la solución mild $\vec{u}(T,\cdot)$ cuando T se acerca al tiempo maximal de existencia T_{max}. En este ejercicio obtendremos una segunda información sobre la explosión de $\vec{u}(T,\cdot)$ cuando $T \longrightarrow T_{max}$ la cual estará dada por el hecho que $\displaystyle\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt = +\infty$.

1. **Multiplicar la ecuación (2) por $\vec{u}$ y tomar la integral sobre $\mathbb{R}^3$. Luego mostrar que**

$$\sup_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x} < +\infty.$$

   Puesto que para todo $0 < T < T_{max}$ se tiene $\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x} + \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}$ y

$$\sup_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = +\infty$$

   concluir entonces que

$$\sup_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x} = +\infty. \tag{13}$$

   En efecto, dada la solución mild $\vec{u} \in L^\infty_t H^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x$, por el Ejercicio 1 sabemos que $\vec{u}$ verifica la ecuación $\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - \Delta\vec{u} = 0$ y ahora al multiplicar puntualmente esta ecuación por $\vec{u}(t,x)$ y al integrar sobre $\mathbb{R}^3$ obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\vec{u}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx = 0,$$

   donde, antes de trabajar con esta igualdad debemos mostrar que cada una de las integrales están bien definidas, es decir, son cantidades finitas. Para ello empezaremos por el término no lineal $\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})$ el cual se escribe como $\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) = \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))$ dado que $div(\vec{u}) = 0$. En este término observamos el producto $\vec{u}\otimes\vec{u}$ donde, puesto que $\vec{u}\in L^\infty_t H^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x$ para casi todo tiempo t se tiene que $\vec{u}(t,\cdot)\in \dot{H}^1_x\cap \dot{H}^2_x$ y por interpolación entre estos dos espacios de Sobolev obtenemos que $\vec{u}(t,\cdot)\in \dot{H}^{\frac{3}{2}}_x$.

De esta manera por la leyes de producto entre espacios de Sobolev (Lema 3, Lección 2) tenemos que $\vec{u}(t,\cdot)\otimes\vec{u}(t,\cdot)\in \dot{H}^1_x$ (pues $\|\vec{u}(t,\cdot)\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\leq c\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} < +\infty$) y entonces obtenemos que $div(\vec{u}\otimes\vec{u})(t,\cdot)\in L^2_x$. Finalmente por la continuidad del proyector de Leray $\mathbb{P}(\cdot)$ en el espacio $L^2_x(\mathbb{R}^3)$ tenemos que $\mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))(t,\cdot)\in L^2_x$.

Estudiemos ahora el término $\Delta\vec{u}(t,\cdot)$. Dado que $\vec{u}\in L^2_t\dot{H}^2_x$ entonces casi todo tiempo t se tiene $\vec{u}(t,\cdot)\in \dot{H}^2_x$ y luego $\Delta\vec{u}(t,\cdot)\in L^2_x$.

Por otro lado para la derivada temporal, $\partial_t\vec{u}$, tenemos que $\partial_t\vec{u}(t,\cdot) = -\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,\cdot)+\Delta\vec{u}(t,\cdot)\in L^2_x$.

De esta manera, dado que cada término de la ecuación $\partial_t\vec{u}(t,\cdot) - \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,\cdot)+\Delta\vec{u}(t,\cdot)$ pertenece al espacio L^2_x y dado que $\vec{u}(t,\cdot)\in H^1_x\subset L^2_x$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que cada integral en la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{u}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx + \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{u}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx = 0 \tag{14}$$

es una cantidad finita y podemos ahora trabajar con esta igualdad.

En efecto, para la primera integral aquí arriba por el teorema de derivación bajo el signo integral tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{u}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\partial_t|\vec{u}(t,x)|^2dx = \frac{1}{2}\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}(t,x)|^2dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2_x}.$$

Por otro lado para la segunda integral, puesto que $div(\vec{u}) = 0$ y usando inetgración por partes obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx = 0.$$

Finalmente para la tercera integral, igualmente por integración por partes obtenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{u}(t,x)\cdot\vec{u}(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,x)|^2dx = \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}.$$

Ahora, reemplazando estas igualdades en la igualdad (14) arriba obtenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2_x} + \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} = 0$$

de donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2_x}\leq 0$$

y al integrar esta cantidad sobre el intervalo de tiempo $[0,T]$, para todo $0\leq T\leq T_{max}$, obtenemos que

$$\|\vec{u}(T,\cdot)\|^2_{L^2_x}\leq 2\|\vec{u}_0\|^2_{L^2_x}\leq 2\|\vec{u}_0\|^2_{H^1_x} < +\infty.$$

Observamos de esta manera que

$$\sup_{0<T<T_{max}}\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x}\leq\sqrt{2}\|\vec{u}_0\|_{H^1_x} < +\infty$$

y puesto que por el Ejercicio 2 (cuando $T_{max} < +\infty$) tenemos que

$$\sup_{0<T<T_{max}}\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = \sup_{0<T<T_{max}}\left(\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x} + \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\right) = +\infty$$

concluimos entonces que

$$\sup_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x} = +\infty.$$

Es decir, es una información más precisa sobre la explosión de la norma $\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{H^1_x} = \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{L^2_x} + \|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}$ cuando $T \longrightarrow T_{max}$ donde vemos que la norma en el espacio L^2_x está siempre controlada y es la norma del espacio $\dot{H}^1_x$ la que explota en el tiempo $T_{max} < +\infty$.

2. **De igual manera, multiplicar la ecuación (2) por $\Delta\vec{u}$ e integrar sobre $\mathbb{R}^3$. Luego deducir la desigualdad**

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} \leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}.$$

Indicación: en este punto asumiremos la identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(t,x)\,dx = -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\vec{u}(t,x)\cdot((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\,dx.$$

En el ejercicio anterior vimos que, casi todo tiempo t, cada término de las ecuaciones de Navier-Stokes $\partial_t\vec{u}(t,\cdot)+\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,\cdot)-\Delta\vec{u}(t,\cdot)$ pertenece al espacio de Lebesgue L^2_x. Además dado que $\vec{u}\in L^2_t(\dot{H}^2_x)$ entonce sabemos que casi todo tiempo t, $\Delta\vec{u}(t,\cdot)$ pertenece a L^2_x y entonces por la desigualdad de Cauchy-Schawrz todas las integrales de la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{u}(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(t,x)dx + \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{u}(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(t,x)dx = 0 \tag{15}$$

están bien definidas. De esta manera, por una integración por partes y por el teorema de derivación bajo el signo integral, en la primera integral tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{u}(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(t,x)dx &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t u_i(t,x)\partial_j^2 u_i(t,x)dx = -\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\partial_j u_i(t,x)\partial_j u_i(t,x)dx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,x)|^2dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}.\end{aligned}$$

En la segunda integral, por la sugerencia aquí arriba (en donde se utiliza integración por partes y el hecho que $div(\vec{u})=0$) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(x)\,dx = -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\vec{u}(t,x)\cdot((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\,dx.$$

Finalmente en la tercera integral obtenemos directamente que

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{u}(t,x)\cdot\Delta\vec{u}(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{u}(t,x)|^2dx = -\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}.$$

De esta manera, al reemplazar estas igualdades en la ecuación (15) obtenemos que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} - \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\vec{u}(t,x)\cdot((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\,dx - \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x} = 0$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} = -2\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\vec{u}(t,x)\cdot((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\,dx - 2\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}. \tag{16}$$

Ahora estudiaremos el primer término a la derecha de esta igualdad donde mostraremos que

$$-2\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\vec{u}(t,x)\cdot((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\,dx \leq 2\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2_x}. \tag{17}$$

En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned}
2\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\vec{u}(t,x)\cdot((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x)\,dx &\leq 2\sum_{j=1}^{3}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x}\|((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x}\\
&= 2\sum_{j=1}^{3}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\|((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x},
\end{aligned}$$

de donde, aplicando la desigualdad de Hölder en el término $\|((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x}$ (con $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$) tenemos

$$2\sum_{j=1}^{3}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\|((\partial_j\vec{u})\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x} \leq 2\sum_{j=1}^{3}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x}\|\partial_j\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^3_x}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^6_x}.$$

Ahora, por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev, en la última expresión aquí arriba se tiene que

$$2\sum_{j=1}^{3}\|\partial_j\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^3_x} \leq 2\sum_{j=1}^{3}\|\partial_j\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} \leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}$$

y además

$$\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^6_x} \leq \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x} = \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2_x},$$

de esta manera obtenemos la desigualdad (17).

Una vez que hemos verificado esta desigualdad, volviendo a la desigualdad (16) obtenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} &\leq 2\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2_x} - 2\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}\\
&\leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} + \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x} - 2\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}\\
&\leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} - \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2_x}\\
&\leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}.
\end{aligned}$$

3. **La desigualdad de Grönwall nos asegura que: dadas $\varphi(t),\psi(t),\phi(t)$ tres funciones de variable real y a valores en los reales tales que**

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) \leq \varphi(t)\psi(t)+\phi(t)$$

entonces, para todo $t\geq 0$ se tiene

$$\varphi(t) \leq \varphi(0)e^{\int_0^t\psi(s)ds} + \int_0^t \phi(s)e^{\int_s^t\psi(\tau)d\tau}.$$

Usar esta desigualdad para mostrar que

$$\sup_{0<T<T_{max}}\|\vec{u}(T,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} \leq e^{\int_0^{T_{max}}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}dt}\|\vec{u}_0\|_{H^1_x}. \tag{18}$$

En efecto, en la desigualdad de Grönwall aquí arriba tomamos $\varphi(t) = \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}$, $\psi(t) = \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x}$ y $\phi(t) = 0$. De esta manera, por el literal anterior sabemos que

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} \leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x},$$

es decir, se verifica la condición en la desigualdad de Grönwall y por una aplicación directa de esta desigualdad obtenemos entonces que

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} \leq e^{\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} ds}\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1_x} \leq e^{\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} ds}\|\vec{u}_0\|_{H^1_x},$$

para todo tiempo $t \in [0, T_{max}[$. De esta manera al tomar el supremo sobre el intervalo de tiempo $[0, T_{max}[$ tenemos la desigualdad deseada

$$\sup_{0<T<T_{max}} \|\vec{u}(T,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} \leq e^{\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt}\|\vec{u}_0\|^2_{H^1_x}.$$

4. **Usando las expresiones (13) y (18) concluir que si $T_{max} < +\infty$ entonces $\displaystyle\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt = +\infty$.**

Por la expresión (13) sabemos que: si $T_{max} < +\infty$ entonces la norma $\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}$ explota cuando el tiempo T tiende hacia el tiempo maximal de existencia T_{max}.

Por otro lado, por la expresión (18) observamos que tenemos el siguiente control: para todo tiempo $T \in [0, T_{max}[$,

$$\|\vec{u}(T,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} \leq e^{\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt}\|\vec{u}_0\|^2_{H^1_x},$$

de donde podemos ver que si la cantidad $\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt$ es finita, es decir $\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt < +\infty$, entonces la norma $\|\vec{u}(T,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}$ se controla cuando $T \longrightarrow T_{max}$ lo que *contradice* la explosión en el tiempo T_{max} dada por la expresión (13).

De esta manera deducimos que si $T_{max} < +\infty$ entonces necesariamente

$$\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}_x} dt = +\infty$$

lo que nos proporciona un segundo criterio de explosión en tiempo para las soluciones mild de las ecuaciones de Navier-Stokes construidas en el teorema de Fujita-Kato.