Lección n°1: Introducción a las Ecuaciones de Navier-Stokes

USFQ, septiembre 2016

Índice

Este curso no pretende ser una secuela del curso dictado en noviembre 2015 en la Universidad San Francisco de Quito[1], sino que constituye más bien un complemento: por un lado, al disponer de más horas de clase, ha sido posible entrar más en detalle en las demostraciones, por otro lado, si bien los temas tratados en estas lecciones retoman algunas líneas del curso del año 2015, el enfoque es bastante diferente y en unas partes este curso es mucho más completo y riguroso.

1. Introducción rápida

Las ecuaciones de Navier[2]-Stokes[3] son un sistema de ecuaciones que sirven para modelizar la dinámica de los fluidos (aire, agua) y este sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases}} \tag{1}$$

Expliquemos (rápidamente) en qué consiste cada término.

- La función $\vec{u} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un vector en tres dimensiones: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y en donde cada función u_i es función del tiempo t y de un vector del espacio: $u_i = u_i(t,x) = u_i(t, x_1, x_2, x_3)$ para todo $1 \leq i \leq 3$.

  $\Rightarrow$ La cantidad $\partial_t \vec{u}$ designa entonces la derivada de $\vec{u}$ con respecto a la variable temporal.

  $\Rightarrow$ Se trata entonces de ecuaciones de *evolución*.

- El término $\nu\Delta\vec{u}$ es un término de *difusión* de intensidad $\nu > 0$.

  $\Rightarrow$ La palabra *difusión* debe entenderse en el sentido de la *ecuación del calor*.

  $\Rightarrow$ En efecto, si escribimos $\partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u}$ obtenemos la ecuación del calor.

  $\Rightarrow$ El paramétro ν modeliza la *viscosidad* del fluido, en este curso tomaremos $\nu = 1$.

[1] Y que puede descargarse aquí: http://www.amarun.net/index.php/acerca-amarun-menu-superior/academia/41-ecuaciones-en-derivadas-parciales
[2] Henri Navier (1785-1836), matemático francés
[3] George Stokes (1819-1903), matemático británico

- La cantidad no lineal $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ expresa el *movimiento* de un elemento del fluido que al tiempo t ocupa la posición x.

  $\Rightarrow$ Estamos hablando de un fluido que está presente en *todo* el espacio.

  $\Rightarrow$ Si escribimos $\partial_t \vec{u} = (B \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ obtenemos una ecuación de *transporte* de velocidad B.

- La presión $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar que depende del tiempo y del espacio: $p = p(t, x)$.

- La condición $div(\vec{u}) = 0$ expresa la incompresibilidad del fluido.

- El dato inicial $\vec{u}_0 = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un vector tal que cada una de sus componentes $(u_{i,0})_{1\leq i\leq 3}$ son funciones del espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$.

$\Longrightarrow$ Encontrar una solución del problema (1) consiste en

  * exhibir un tiempo de existencia $T > 0$,

  * encontrar a partir del dato inicial $\vec{u}_0$ dos funciones $(\vec{u}, p)$ que verifican estas ecuaciones en el intervalo $[0, T]$.

En este curso estaremos interesados en estudiar dos maneras distintas de obtener soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y en estudiar su regularidad, pero para ello necesitaremos algunas herramientas matemáticas.

2. Algunas Herramientas

Dado que estamos interesados en estudiar las ecuaciones de Navier-Stokes en 3 dimensiones, vamos a exponer nuestras definiciones considerando que las funciones que intervienen están definidas sobre $\mathbb{R}^3$ y que sus valores son reales o son vectores en $\mathbb{R}^3$.

2.1. Espacios de Lebesgue

Necesitaremos medir el tamaño de funciones que dependen de la variable de tiempo y de la variable de espacio, pero es necesario distinguir la manera en que se mide cada una de estas dos variables.

Definición 1 *Si* $\vec{f} : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una función medible y si* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *son dos índices reales, entonces diremos que la función* $\vec{f}$ *es* L^p*-integrable en la variable de tiempo y que es* L^q*-integrable en la variable de espacio, es decir que* $\vec{f}$ *pertenece al espacio de Lebesgue* $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$*, si la cantidad siguiente es finita:*

$$\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^p_t(L^q_x)} = \left(\int_0^{+\infty} \|\vec{f}(t,\cdot)\|^p_{L^q} dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{f}(t,x)|^q dx\right)^{p/q} dt\right)^{1/p}.$$

Es importante insistir en que *primero* se integra en la variable de espacio y solo *después* se integra la cantidad resultante en la variable temporal.

Propiedades

- Si $1 \leq p, q \leq +\infty$, los espacios de Lebesgue $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ son espacios de Banach.

- Si $1 < p, q < +\infty$, estos espacios $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ son espacios reflexivos y se tiene $\left(L^p_t(L^q_x)\right)' = L^{p'}_t(L^{q'}_x)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

- En particular, por dualidad se tiene la fórmula

$$\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^p_t(L^q_x)} = \sup_{\|\vec{\varphi}(\cdot,\cdot)\|_{L^{p'}_t(L^{q'}_x)}\leq 1} \left|\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(t,x)\cdot\vec{\varphi}(t,x)dxdt\right|.$$

2.2. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev miden el tamaño de las funciones y de sus derivadas.

Definición 2 (Espacios de Sobolev no-homogéneos) *Si $1 \leq p < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ y si $\alpha \in \mathbb{N}^3$ es un multi-índice, definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}$ como el conjunto de distribuciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tales que la siguiente cantidad es finita*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^p}.$$

En donde $D^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}}$, con $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

En el caso cuando $p = 2$, disponemos de una estructura de espacio de Hilbert y por esta razón escribiremos

$$H^k = W^{k,2}.$$

Un espacio que será muy utilizado en este curso es el espacio H^1 que puede ser caracterizado por la cantidad

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}. \tag{2}$$

El hecho de trabajar sobre el espacio de Lebesgue L^2 tiene alguna ventajas. En efecto, la fórmula de Plancherel nos proporciona la identidad

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2},$$

en donde $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$, y utilizando las propiedades de la transformada de Fourier con respecto a las derivaciones tenemos la siguiente caracterización de los espacios H^k:

$$\|f\|_{H^k} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \simeq \|\widehat{f}\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2k} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Gracias a estas identidades, podemos definir los espacios de Sobolev fraccionarios H^s, es decir espacios que miden de manera más fina la regularidad de las funciones.

Definición 3 (Espacios de Sobolev no-homogéneos fraccionarios) *Si $s \in \mathbb{R}$ definimos el espacio de Sobolev H^s como el conjunto de distribuciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tales que la siguiente cantidad es finita*

$$\|f\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \simeq \|\widehat{f}\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Es posible definir espacios de Sobolev fraccionarios generales $W^{s,p}$, pero en este curso únicamente trabajaremos sobre los espacios de Sobolev H^s.

Estos espacios no son homogéneos en el sentido que si consideramos la función $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ para un cierto $\lambda > 0$ y si calculamos por ejemplo la cantidad $\|f_\lambda\|_{H^1}$ utilizando la caracterización dada en (2) tenemos

$$\|f_\lambda\|_{H^1} = \|f_\lambda\|_{L^2} + \|\nabla f_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{-3/2}\|f\|_{L^2} + \lambda^{1-3/2}\|\nabla f\|_{L^2},$$

y como vemos esta cantidad se compone de la suma de dos términos de homogeneidad diferente con respecto a la dilatación de factor λ. Esto nos lleva a considerar espacios de Sobolev homogéneos:

Definición 4 (Espacios de Sobolev homogéneos)

- *Si $k \in \mathbb{N}$ definimos el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^k$ como el conjunto de distribuciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tales que la siguiente cantidad es finita*

$$\|f\|_{\dot{H}^k} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^2}.$$

- *Si $s \in \mathbb{R}$ definimos el espacio de Sobolev homogéneo fraccionario $\dot{H}^s$ como el conjunto de distribuciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tales que la siguiente cantidad es finita*

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Indiquemos que en el caso particular de estos espacios de Sobolev $\dot{H}^s$, si $s = k$ estas dos definiciones son equivalentes. Un ejemplo que será usado frecuentemente es el espacio $\|f\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla f\|_{L^2}$.

Precaución: Los espacios de Sobolev homogéneos no son espacios normados y su uso requiere tener un poco de cuidado.

2.3. Desigualdades de Sobolev

Estas desigualdades son fundamentales en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales pues permiten controlar el tamaño de las funciones por medio del tamaño de sus derivadas.

Teorema 1 *Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que pertenece al espacio de Sobolev $\dot{H}^s$ con $0 < s < 3/2$, entonces se tiene la desigualdad*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}, \tag{3}$$

con $\frac{3}{q} = \frac{3}{2} - s$.

Un ejemplo importante en este curso está dado por la desigualdad

$$\|f\|_{L^6} \leq C \|\nabla f\|_{L^2},$$

es decir, si controlamos la norma L^2 de las primeras derivadas de una función f, entonces podemos controlar la norma L^6 de la función f.

Existen versiones más generales y refinadas de estas desigualdades, pero para nuestras necesidades inmediatas este enunciado es suficiente.

2.4. Producto de Convolución

El producto de convolución juega un papel central en el análisis, en particular porque tiene relaciones muy particulares con las derivadas y con la transformada de Fourier.

Proposición 1 *Si $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones medibles tales que $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$, entonces el producto de convolución*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x - y) g(y) dy,$$

pertenece al espacio $L^r(\mathbb{R}^3)$ con $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y se tienen las desigualdades de Young:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{4}$$

Propiedades

- Se tiene $f * g = g * f \quad$ y $\quad f * (g + h) = f * g + f * h$.
- Si f, g son funciones suficientemente regulares se tiene para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^3$:

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g).$$

- La relación con la transformada de Fourier está dada por la expresión

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \times \widehat{g}(\xi).$$

Observación 1 *Tanto las desigualdades de Sobolev (3) como las desigualdades de Young (4) son bastante* rígidas, *en el sentido que es necesario verificar relaciones muy precisas entre los diferentes índices para poder aplicarlas.*

3. La ecuación del Calor

Sea $u :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables: $u = u(t, x)$ en donde t representa el tiempo y x es un vector del espacio $\mathbb{R}^3$. La *ecuación del calor* consiste en estudiar la propagación del calor en, digamos, una placa homogénea. La ecuación que se obtiene es la siguiente

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0. \tag{5}$$

Si comparamos esta ecuación con las ecuaciones de Navier-Stokes (1), observamos que estas últimas ecuaciones pueden verse como una ecuación del calor no homogénea con un término no lineal y esto nos motiva para estudiar algunas de las propiedades de la ecuación del calor.

Definición 5 (Solución fundamental de la Ecuación del Calor) *La función*

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^3, t < 0, \end{cases}$$

es la solución fundamental de la ecuación del calor (5).

Vemos sin problema que $\partial_t h(t, x) - \Delta h(t, x) = 0$ si $x \neq 0$ para todo $t > 0$.

Observación 2

- *La solución fundamental es una función radial positiva en la variable x.*
- *Esta función es singular en el punto $(0, 0)$ y si $t > 0$, esta función es de clase $\mathcal{C}^\infty$.*

Proposición 2 *Se tienen las siguientes estimaciones para la solución fundamental de la ecuación del calor:*

- *para todo $t > 0$:*

$$|h(t, x)| \leq \begin{cases} c|x|^{-3} & \text{si } |x|^2 \geq t \\ ct^{-3/2} & \text{si } |x|^2 \leq t \end{cases}$$

- *para todo $t > 0$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene*

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha h(t, \cdot) \right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha| + 2k + 3(1 - 1/p)}{2}}$$

Notación: a veces escribiremos $h_t(x)$ en vez de $h(t, x)$.

Problema de valor inicial

Nos interesamos ahora en estudiar el siguiente problema cuando el dato inicial está dado por una función $u_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sobre } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{6}$$

Las propiedades de la solución fundamental de la ecuación del calor nos permiten construir por convolución funciones que resuelven este problema de valor inicial.

Teorema 2 *Sea $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, si para todo $t > 0$ definimos la función $u(t,x)$ por medio de la expresión*

$$u(t,x) = h_t * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^3} h(t, x-y) u_0(y) dy,$$

entonces tenemos:

- *la función u pertenece al espacio $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$,*
- *la función u es solución del problema de valor inicial (6), con $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^3$,*
- *para todo punto $x \in \mathbb{R}^3$ se tiene $\displaystyle\lim_{\substack{(t,y)\to(0,x)\\ t>0, y\in\mathbb{R}^3}} u(t,y) = u_0(x)$.*

Observación 3 *Este teorema nos indica que si partimos de un dato inicial u_0 que es apenas continuo, la solución de la ecuación del calor asociada $u(t,x)$ es* inmediatamente *regular. Este hecho muestra el poder regularizante del operador Laplaciano.*

Problema no-homogéneo

Consideramos ahora el siguiente problema, donde $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{7}$$

Por simplicidad, hemos fijado $u_0 \equiv 0$, veremos posteriormente cómo considerar un caso más general.

Teorema 3 *Sea $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función a soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[; \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))$. Si definimos una función $u(t,x)$ por medio de la expresión*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} h(t-s, x-y) f(s,y) dy ds,$$

para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, entonces se tiene que

- *$u \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[; \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))$,*
- *la función u es solución del problema no homogéneo (7) para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$,*
- *además, para todo punto $x \in \mathbb{R}^3$ se tiene el límite $\displaystyle\lim_{\substack{(t,y)\to(0,x)\\ t>0, y\in\mathbb{R}^3}} u(t,y) = 0$.*

Combinando los dos teoremas anteriores obtenemos:

Teorema 4 *Sea $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función a soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))$. Sea $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si consideramos el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \textit{sobre }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) & \textit{sobre } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Entonces la función $u(t,x)$ definida por medio de la expresión

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} h(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} h(t-s, x-y) f(s,y) dy ds, \tag{8}$$

para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$ es solución del problema anterior.

Podemos escribir la fórmula (8) de la siguiente manera:

$$u(t,x) = h_t * u_0(x) + \int_0^t h_{t-s} * f(s,x) ds,$$

y esta expresión será retomada de una forma más general en las lecciones siguientes donde veremos que constituye el punto de inicio del estudio de la existencia de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.