



Índice

1. Dispersión en Schrödinger	1
2. Estimaciones de dispersión	1
3. Ecuaciones no lineales: focalisante versus defocalisante	3
4. Estimaciones de Strichartz	3
5. Demostración de las desigualdades de Strichartz	5
6. Buen colocamiento en L^2	6

1. Dispersión en Schrödinger

En la lección anterior estudiamos, de manera muy somera, algunas ecuaciones dispersivas, más que nada desde un punto de vista cualitativo. Ahora nos gustaría entender rigurosamente las soluciones de la ecuación lineal de Schrödinger en \mathbb{R}^d , $d \geq 1$,

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u &= 0, & u(t, x) &\in \mathbb{C}, \\ u(t = 0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u_0(x)$ es una función dada, que supondremos decreciente en espacio. La pregunta es cómo resolver esta ecuación de manera que podamos resolver después su generalización no lineal.

Antes que todo lo mejor es ganar un poco de intuición. Como en la lección anterior, usando una onda plana $u = e^{i(kx - wt)}$, donde $k \in \mathbb{R}^d$ y $w \in \mathbb{R}$, tenemos que u es solución de la primera ecuación en (1) si

$$w(k) = |k|^2,$$

de donde la velocidad de grupo viene dada por

$$\nabla w(k) = 2k,$$

por lo que mientras más grande es k , más rápido viajan las ondas a infinito. En cierta forma, las ondas se *dispersan*, o decaen vía dispersión a infinito.

2. Estimaciones de dispersión

Ahora intentemos ver la heurística anterior de manera rigurosa. La mejor forma de entender las soluciones de (1) es vía la Transformada de Fourier

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) dx.$$

Asumiremos pues que $u(t, x)$ es una función localizada en la variable x , para cada tiempo t ; por ejemplo en la clase de Schwartz $S = S(\mathbb{R}^d)$. Asimismo, supondremos que $u(t = 0) = u_0 \in S$. Aplicando transformada de Fourier en la variable x sobre (1), obtenemos

$$i\hat{u}_t(t, \xi) - 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0,$$

que es una EDO de primer orden para $\hat{u}(t, \xi)$ en la variable t , para cada ξ fijo. La solución a esta EDO está dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 i |\xi|^2 t} \hat{u}(0, \xi) = e^{-4\pi^2 i |\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi). \quad (2)$$

El cálculo funcional nos permite dar un sentido a la expresión anterior. Decimos que

$$u(t, x) = e^{it\Delta_x} u_0(x) = S(t)u_0(x), \quad S(t) := e^{it\Delta_x}, \quad (3)$$

porque precisamente en la variable de Fourier esta expresión se lee como (2). Usando la transformada de Fourier inversa, tenemos que

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{u}(t, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 i |\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

La resolución de esta integral es bien conocida y se reduce a la Transformada de Fourier de una gaussiana más un poco de Análisis complejo. Uno obtiene

$$u(t, x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{d/2}} \int e^{i \frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy. \quad (4)$$

Notar que para que esta expresión tenga sentido es necesario cierto decaimiento en u_0 . En lo que sigue, supondremos que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, de tal manera que la expresión anterior está bien definida, aunque la hipótesis $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ no es necesaria si pasamos al límite por densidad. Aún así, de (4) uno obtiene para todo $t > 0$, la *estimación de dispersión*

$$\|u(t)\|_{L_x^\infty} \leq \frac{C}{|t|^{d/2}} \|u_0\|_{L_x^1}, \quad (5)$$

para alguna constante $C > 0$, y donde el subíndice x representa integración en el espacio \mathbb{R}^d . Luego, como consecuencia de la *dispersión en la ecuación* (1), toda solución con dato inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ decae en norma del supremo como $|t|^{-d/2}$. Notar que mientras **más grande es la dimensión d , más rápido decae la solución**.

Por otro lado, uno puede probar que para (1) la norma L^2 de la solución no puede decaer, o mejor dicho, es *conservada*. En efecto, suponiendo $u \in S$ y luego pasando al límite por densidad,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 &= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \bar{u} \partial_t u \\ &= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \bar{u} (i \partial_t u) \\ &= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \nabla \bar{u} \nabla u \\ &= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Está última identidad pasa al límite en L^2 de manera simple (hacerlo como ejercicio). Luego, para todo tiempo y $u_0 \in L^2$,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2(x) dx,$$

Combinando (5) con esta última expresión, y gracias a la ayuda de un Teorema de Interpolación (Ver Linares-Ponce [2]), es posible probar que para todo $p \geq 2$, la solución de (1) satisface

$$\|u(t)\|_{L_x^p} \leq \frac{C_p}{t^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \|u_0\|_{L_x^{p'}}, \quad t > 0, \quad (6)$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Notemos que para $p = \infty$ uno recupera (5).

3. Ecuaciones no lineales: focalisante versus defocalisante

La característica principal de la ecuación (1) es su carácter *lineal*, en el sentido que suma de soluciones es también solución. Toda solución de (1) está explícitamente dada por (4). Sin embargo, a menudo en aplicaciones uno se encuentra con sistemas donde pequeñas perturbaciones inducen términos no lineales en las ecuaciones. Es así que, como por ejemplo en óptica no lineal (estudio de haces de luz por ejemplo), la descripción de la amplitud de onda de un rayo viene dada por una ecuación de Schrödinger no-lineal

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^2 u &= 0, \quad u = u(t, x) \in \mathbb{C}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^3, \\ u(t=0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Ahora la suma de soluciones no es solución de manera general. La ecuación (7) con signo $+$ en la no linealidad se denomina usualmente **focalisante**, mientras que el signo $-$ es el **defocalisante**, por razones que veremos más en detalle en la lección siguiente. Sin embargo, para los propósitos de esta lección, no existirá diferencia significativa entre ambos signos.

4. Estimaciones de Strichartz

La idea principal de estas notas es poder darles una noción de cómo construir una solución para (7), al menos durante un período pequeño de tiempo. Para ello, debemos ver (7) de una manera más general, muy similarmente a cuando se resuelve una EDO usando el Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard. Para

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u &= f, \quad f(t, x) = f(u(t, x)) = \mp |u(t, x)|^2 u(t, x), \\ u(t=0, x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

deseamos aplicar la misma estrategia del caso lineal. Como explicamos más arriba, el signo en frente de f no será de importancia en lo que sigue, por lo que asumiremos sin pérdida de generalidad que es positivo. Usando la transformada de Fourier sólo en la variable x , uno obtiene

$$i\hat{u}_t(t, \xi) - 4\pi^2|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi).$$

Para resolver esta EDO en t uno utiliza la fórmula de factor integrante:

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi i t |\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-4\pi i |\xi|^2 (t-s)} \hat{f}(s, \xi) ds.$$

Usando la misma analogía como en el caso lineal, uno tiene que $u(t) = u(t, \cdot)$ satisface la ecuación implícita

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \tag{8}$$

donde usamos el hecho que

$$S(t)S(-s) = S(t-s).$$

Esta forma de escribir el problema (7) se llama *formulación de Duhamel* de (7), y es el punto de partida para intentar encontrar una solución a *casi todas* las ecuaciones dispersivas. Si denotamos por \mathcal{T} el operador

$$\mathcal{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \quad f(u(s)) = |u(s)|^2 u(s), \tag{9}$$

entonces para encontrar una solución de (7) basta encontrar un punto fijo de \mathcal{T} en un espacio funcional conveniente:

$$u(t) = \mathcal{T}[u](t). \tag{10}$$

Este cuadro de trabajo estará dado por espacios vectoriales que mezclen integración en tiempo y en espacio, una propiedad que las estimaciones de la sección anterior parecen no poder garantizar. Para ello necesitaremos nuevas estimaciones.

Para un intervalo de tiempo $I \subseteq \mathbb{R}$, definamos el espacio $L_I^q L_x^r$ como sigue: decimos que $g = g(t, x) \in L_I^q L_x^r$ si

$$\left(\int_I \left(\int |g(t, x)|^r dx \right)^{q/r} dt \right)^{1/q} < +\infty.$$

Cuando I está implícitamente claro, denotaremos simplemente $L_I^q L_x^r = L_t^q L_x^r$. Recordemos que el exponente de Sobolev 2^* viene dado por

$$2^* := \begin{cases} 2d/(d-2), & d \geq 3, \\ +\infty, & d = 1, 2. \end{cases}$$

Por otro lado, diremos que el par (q, r) , con $2 \leq q \leq +\infty$, $2 \leq r < 2^*$ si $d \geq 2$, o bien $2 \leq r \leq 2^*$ si $d = 1$, es **admissible** si

$$\frac{2}{q} = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right). \quad (11)$$

Por ejemplo, en dimensión $d = 3$, los pares $(8, \frac{12}{5})$, $(\infty, 2)$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$ son admisibles (ver Figura 1). En lo que sigue, trabajaremos con el punto $(8, \frac{12}{5})$.

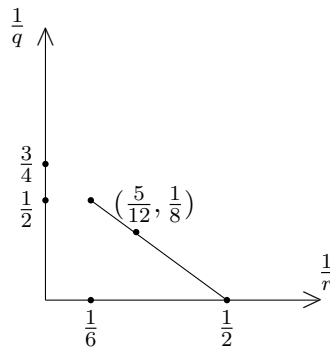


Figura 1: El conjunto de puntos admisibles para las estimaciones de Strichartz si $d = 3$.

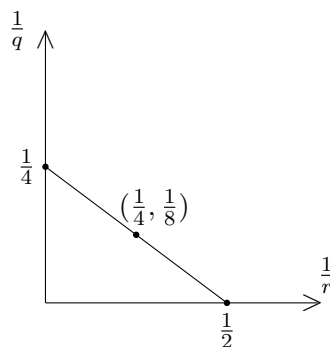


Figura 2: El conjunto de puntos admisibles para las estimaciones de Strichartz si ahora $d = 1$.

Para estimar el operador \mathcal{T} en (9), nuestra herramienta fundamental serán las llamadas *estimaciones de Strichartz*, que son una forma compacta y muy útil de representar las estimaciones de dispersión de la sección precedente.

Teorema 1 (Strichartz) Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo par de puntos admisibles (q, r) , uno tiene

$$\|S(t)u_0\|_{L_{\mathbb{R}}^q L_x^r} \leq C \|u_0\|_{L_x^2}, \quad S(t) = e^{it\Delta}, \quad (12)$$

y para un intervalo $I = [0, T]$,

$$\left\| \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L_I^q L_x^r} \leq C \|f(u)\|_{L_I^{q'} L_x^{r'}}, \quad (13)$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ y también $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Vamos a demostrar estas estimaciones sólo en el caso *non-endpoint*, es decir $q \neq 2$. El caso límite $q = 2$ requiere nuevas ideas, ver [3] por ejemplo. De manera informal, $q = 2$ es equivalente a $r = 2^*$.

5. Demostración de las desigualdades de Strichartz

Nos queda probar las estimaciones de Strichartz. Para ello, notemos que, gracias a la caracterización de las normas vía dualidad, (12) es equivalente a demostrar que para toda $\varphi \in L_{\mathbb{R}}^{q'} L_x^{r'}$,

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(t)u_0(x)\overline{\varphi(t,x)}dxdt \leq C \|u_0\|_{L^2} \|\varphi\|_{L_{\mathbb{R}}^{q'} L_x^{r'}},$$

(note que el dual de $L_{\mathbb{R}}^q L_x^r$ es simplemente $L_{\mathbb{R}}^{q'} L_x^{r'}$). Primero que todo, uno tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(t)u_0(x)\overline{\varphi(t,x)}dxdt &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{S(t)u_0(x)}\varphi(t,x)dt dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \left(\int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t,x)dt \right) dx \\ &\leq \|u_0\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t)dt \right\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t)dt \right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t,x)S(t')\overline{\varphi(t',x)}dt dt' \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} S(t'-t)\varphi(t,x)\overline{\varphi(t',x)}dx \right) dt dt' \quad (S(t)S(-t') = S(t-t')) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \|S(t'-t)\varphi(t)\|_{L_x^r} dt \right) \|\varphi(t')\|_{L_x^{r'}} dt' \quad (\text{Hölder en } x) \\ &\leq \|\varphi\|_{L_{\mathbb{R}}^{q'} L_x^{r'}} \left\| \int_{\mathbb{R}} S(\cdot - t)\varphi(t)dt \right\|_{L_{\mathbb{R}}^q L_x^r} \quad (\text{Hölder en } t'). \end{aligned}$$

Notemos que en cierta manera, para poder continuar, debemos probar (13). Si (13) es cierta, entonces (12) será válida (el intervalo de integración en tiempo no importa para la estimación final, como veremos a continuación).

Probemos (13). Uno tiene de la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t S(t-s)\varphi(s)ds \right\|_{L_I^q L_x^r} &\leq \left\| \int_0^t \|S(t-s)\varphi(s)\|_{L_x^r} ds \right\|_{L_I^q} \\ &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\varphi(s)\|_{L_x^{r'}}}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} ds \right\|_{L_I^q} \quad (\text{usando (6)}). \end{aligned}$$

Antes de finalizar la demostración, necesitamos el siguiente resultado de Análisis Armónico, cuya demostración escapa de la (poca) profundidad de estas notas. Ver por ejemplo [2].

Teorema 2 (Hardy-Littlewood-Sobolev) Para cada $f \in L_t^n$ uno tiene

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \star f \|_{L_t^m} \leq C \|f\|_{L_t^n},$$

siempre que

$$0 < \gamma < 1, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - 1 + \gamma.$$

La idea ahora es aplicar este resultado con $m = q$,

$$\gamma = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \in (0, 1),$$

de donde, $2 < r < 2d/(d-2)$ ($d \geq 3$) o bien $2 < r < +\infty$ si $d = 2$, o bien $2 < r \leq +\infty$ si $d = 1$; es decir, recuperamos la cota por el exponente crítico de Sobolev H^1 . Gracias a (11), $\frac{2}{q} = \frac{3}{2} - \frac{3}{r}$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} + 1 - \gamma = \frac{1}{q} + 1 - \frac{2}{q} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q'}.$$

En conclusión,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\varphi(s)\|_{L_x^{r'}} ds}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} \right\|_{L_t^q} \leq C \|\varphi\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}.$$

6. Buen colocamiento en L^2

Queremos construir una solución (o **flujo**) de (7) que respete las condiciones impuestas por Hadamard: que exista y sea única en una clase de funciones continuas en tiempo a valores en un espacio de Banach adecuado, y además exista continuidad **del flujo** con respecto al dato inicial.

Consideremos NLS en dimensión uno, con dato sólo en L^2 :

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm |u|^2 u &= 0, \quad u = u(t, x) \in \mathbb{C}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(t=0, x) &= u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{14}$$

Gracias a (11), en dimensión $d = 1$ los pares $(8, 4)$, $(\infty, 2)$ y $(4, \infty)$ son admisibles (ver Figura 2). En lo que sigue, trabajaremos con el punto $(8, 4)$.

Así como en (7)-(10), encontraremos una solución de (14) de la forma

$$u(t) = \mathcal{T}[u](t), \tag{15}$$

donde

$$\mathcal{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \quad f(u(s)) = \mp |u(s)|^2 u(s). \tag{16}$$

La idea ahora es utilizar el Teorema de Punto fijo de Banach en la bola cerrada

$$B_R := \left\{ u \in C(I, L^2) \cap L_I^8 L_x^4 : \|u\|_{L_I^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_I^8 L_x^4} \leq R \right\},$$

donde $T > 0$ y $R > 0$ son constantes a elegir a posteriori. La estimación $L_I^\infty L_x^2$ de $\mathcal{T}[u]$ es estándar y se hace de manera muy similar al caso H^1 , usando la estimación

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(t)f(t, \cdot) dt \right\|_{L_x^2} \leq C \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}, \tag{17}$$

que se obtiene por dualidad de (12) (Ejercicio.) Veamos ahora la norma de Strichartz. Notemos que $(8, 4)$ es un par admisible. Usando (9), (12) y (13), uno tiene

$$\|\mathcal{T}[u]\|_{L_I^8 L_x^4} \leq C(\|u_0\|_{L_x^2} + \| |u|^2 u \|_{L_I^{8/7} L_x^{4/3}}).$$

Por otro lado, uno tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \| |u(t)|^2 u(t) \|_{L_x^{4/3}}^{8/7} dt &= \int_0^T \|u(t)\|_{L_x^4}^{24/7} dt \\ &\leq \left(\int_0^T 1 dt \right)^{4/7} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L_x^4}^8 dt \right)^{3/7} \quad (\text{H\"older en tiempo}) \\ &= T^{4/7} \|u\|_{L_I^8 L_x^4}^{24/7}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\| |u|^2 u \|_{L_I^{8/7} L_x^{4/3}} \leq T^{1/2} \|u\|_{L_I^8 L_x^4}^3,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}[u]\|_{L_I^8 L_x^4} &\leq C(\|u_0\|_{L_x^2} + T^{1/2} \|u\|_{L_I^8 L_x^4}^3) \\ &\leq C(\|u_0\|_{L_x^2} + T^{1/2} R^3). \end{aligned}$$

Luego, escogiendo $R > 2C\|u_0\|_{L_x^2}$ grande (dependiendo de la norma de u_0), y luego T pequeño tal que $T^{1/2} R^3 < \frac{1}{2C} R$, uno obtiene

$$\|\mathcal{T}[u]\|_{L_I^8 L_x^4} \leq R.$$

Por lo tanto, \mathcal{T} envía B_R hacia B_R .

Probemos ahora que para T pequeño, \mathcal{T} es una contracción. En efecto, para $u, v \in B_R$,

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^4} = \left\| \int_0^t S(t-s)(f(u(s)) - f(v(s))) ds \right\|_{L_I^8 L_x^4},$$

donde $f(u) = -|u|^2 u$. Usando Strichartz (13),

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^4} \leq C \| |u|^2 u - |v|^2 v \|_{L_I^{8/7} L_x^{4/3}}.$$

No es difícil probar que para $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\| |a|^2 a - |b|^2 b \| \leq C(|a|^2 + |b|^2) |a - b|.$$

Luego,

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^4} \leq C(\| |u|^2 + |v|^2 \|) \|u - v\|_{L_I^{8/7} L_x^{4/3}}.$$

Como en la estimación precedente, usando Hölder,

$$\|(|u|^2 + |v|^2) \|u - v\|_{L_x^{4/3}} \leq (\|u\|_{L_x^4}^2 + \|v\|_{L_x^4}^2) \|u - v\|_{L_x^4},$$

de donde

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^4} &\leq C \left\| (\|u\|_{L_x^4}^2 + \|v\|_{L_x^4}^2) \|u - v\|_{L_x^4} \right\|_{L_I^{8/7}} \\ &\leq CT^{1/2} (\|u\|_{L_I^8 L_x^4}^2 + \|v\|_{L_I^8 L_x^4}^2) \|u - v\|_{L_I^8 L_x^4} \\ &\leq CT^{1/2} R^2 \|u - v\|_{L_I^8 L_x^4}. \end{aligned}$$

Luego, para T pequeño, \mathcal{T} es una contracción en B_R .

Concluimos pues, gracias al Teorema del Punto Fijo de Banach, que dado cualquier dato inicial $u_0 \in L^2$, la ecuación no-lineal (7) posee una solución $u(t)$, definida por un instante de tiempo $T > 0$ pequeño, de la formulación de Duhamel (8). Sin embargo, entender esta solución para tiempos largos es un problema no trivial.

Referencias

- [1] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes vol. 10, 2003.
- [2] Felipe Linares y Gustavo Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Universitext 2009, Springer New-York.
- [3] Terence Tao, *Nonlinear Dispersive equations: local and global analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 2006, 373pp.