Revisión del documento “Método General de Integración de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias” del Ing. Jorge Zedeño.

4 de febrero de 2012

1. Introducción

En este artículo revisamos el documento “*Método General de Integración de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*” del Ing. Jorge Zedeño. Disponemos de una versión en formato .pdf que ha sido descargada desde la siguiente dirección internet:

http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/863/supp/863-2247-1-SP.pdf

Este trabajo ha llamado la atención de un periodista del diario El Comercio de modo que una noticia relativa a este documento y su autor ha sido publicada el 8 de enero 2012 en el siguiente enlace

http://www.elcomercio.com/tecnologia/ingeniero-civil-aporta-teorias-matematicas_0_623337773.html

Dado que algunos puntos de esta noticia nos han llamado la atención, hemos decidido estudiar detenidamente el documento en cuestión. Lastimosamente, al leerlo, vemos que existe una gran diferencia entre la noticia del diario El Comercio, que anuncia que “*un científico ecuatoriano aportó a la teoría de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias*” y el documento del que disponemos, pues éste no anuncia nada, carece de una introducción o de una presentación del problema planteado, de un enunciado preciso (ya sea por medio de una *proposición* o de un *teorema*) y no contiene ningún tipo de conclusión. Sin embargo, dado que las matemáticas son un tema que raramente se trata en los medios ecuatorianos, hemos creido pertinente hacer una revisión profunda del trabajo del Ing. Zedeño desde un punto de vista científico. Anotamos también que al realizar una búsqueda sobre el *Foro de Ciencia y Matemática en Bilbao*, al cual según la nota de El Comercio, fue enviado el trabajo para su evaluación, no se ha encontrado ningún resultado concluyente, no se encuentran rastros de tal foro, y menos aún de la presentación del trabajo en cuestión para su evaluación en este marco. Indiquemos que por las razones expuestas anteriormente, nos vemos obligados a utilizar la noticia del diario El Comercio para intentar comprender el objetivo de este documento. Insistimos en que este hecho es lo suficientemente inaudito como para ser recalcado aquí.

Volvamos al documento. Después de un arduo trabajo de depuración y si se lo considera desde una perspectiva puramente matemática, este documento propone un método para resolver un cierto tipo muy particular y muy simple de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este método es relativamente original, pero no constituye en absoluto una mejora a los métodos tradicionales como lo veremos posteriormente.

Que un investigador proponga un método que se ocupa de problemas ya resueltos anteriormente es parte del quehacer científico y esta actividad, si se la comparte debidamente con la comunidad científica, es positiva pues alimenta y mantiene el debate intelectual, independientemente de si estos problemas han sido resueltos desde hace casi tres siglos. Que un diario ecuatoriano promocione el trabajo matemático realizado por investigadores ecuatorianos es algo que sucede raramente y solo se puede pedir que se dé más espacio a este tipo de iniciativas: por ejemplo los periodistas de este y otros diarios podrían alimentar sus crónicas científicas entrevistando o promocionando las investigaciones de los matemáticos ecuatorianos de distintas universidades del país que trabajan seriamente y son reconocidos internacionalmente.

Pero que se divulge la noticia que este descubrimiento "*posicionaría* [al investigador] *al mismo nivel de matemáticos como Isaac Newton o Pier*re[1] *de Laplace*" es, para empezar, un grave error de apreciación del periodista y una falta de modestia del Ing. Zedeño. Que se pretenda además que este método es revolucionario es muy discutible, por no decir totalmente absurdo, y que se desarrolle un plan para enseñarlo a los estudiantes de la carrera de ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE) es muy peligroso para los alumnos y perjudica gravemente a la imagen y prestigio de esta institución de educación superior: los métodos clásicos y tradicionales de resolución de estas ecuaciones funcionan mucho mejor y son muchísimo más útiles que el método propuesto por el Ing. Zedeño.

Este tipo de situaciones son muy graves pues afectan negativamente la imagen científica del Ecuador y deben por lo tanto evitarse de varias maneras: el autor debe discutir con la comunidad científica sus resultados, el o los periodistas deben verificar sus fuentes y la PUCE debe hacer lo mismo antes de lanzarse a una reforma curricular.

∗ ∗ ∗

A continuación se presenta un sumario del contenido de este documento, las secciones marcadas con el símbolo "∗" son de contenido altamente técnico, y el lector no especializado puede omitir su lectura. Se las incluye aquí afin de hacer un estudio lo más completo y unificado posible del documento del Ing. Zedeño.

2. Sobre la noticia del diario El Comercio.

Presentamos aquí rápidamente la noticia referida, poniendo énfasis en las ciertas inexactitudes adicionales a las ya descritas.

3. Problemas de forma. Presentamos rápidamente algunos puntos de forma que permiten, en una primera aproximación, descartar de toda revista de investigación arbitrada el documento del Ing. Zedeño.

∗ **4. Problemas de fondo.** Hacemos un estudio mucho más riguroso del método propuesto y mostramos las limitaciones del mismo

∗ **4.1 Del documento del Ing Zedeño.**

∗ **4.2 El método propuesto, depurado.**

∗ **4.3 Límites del método propuesto.**

∗ **5. Un poco de historia.**

Hacemos un recuento histórico para evidenciar que estas teorías son bien conocidas desde hace muchos años.

6. Conclusiones.

7. Comentarios y sugerencias. Buscando que en el futuro se evite este tipo de incidentes.

7.1 Al autor.

7.2 Al diario El Comercio.

7.3 A la Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

2. Sobre la noticia del diario El Comercio

En la noticia del diario El Comercio, se lee "*El ingeniero civil Jorge Zedeño descubrió hace dos años que existe una forma de resolver todas las ecuaciones diferenciales ordinarias.*"

Es importante notar que existen varias formas de encontrar las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria. Básicamente hay dos grandes familias de métodos: obtener una solución por medio de una fórmula exacta (es decir que se puede expresar por medio de funciones usuales); o utilizar aproximaciones numéricas. En general se *sabe* que estas ecuaciones poseen solución, pues se trata de un *teorema de existencia*, que ha sido debidamente demostrado, aunque a veces no sea posible *resolver* por medio de fórmulas exactas todas las ecuaciones diferenciales ordinarias. En esto casos, lo que se hace es buscar aproximaciones de la solución por medio de métodos numéricos. Éstos métodos son conocidos desde hace tiempo, y su uso es práctica común.

En este sentido el artículo de El Comercio comete un grave error al escribir que se rompe "[...] *el dogma creado por 38 matemáticos del mundo, que no todas las ecuaciones de ese tipo tenían solución y hasta hoy así se lo había enseñado a los alumnos.*" Esto es evidentemente falso, pero llama la atención el número 38. No cabe sino preguntarse

[1] y no "*Pier*" de Laplace como se puede leer en la noticia de El Comercio.

de donde sale este número, y a qué lista se refiere. Una breve - demasiado breve - búsqueda en internet lleva directamente a la página de Wikipedia sobre la historia de ecuaciones diferenciales, página en la que constan exactamente 38 matemáticos, entre los que se incluye a Newton y Laplace, y a varios matemáticos que sabían, hace más de un par de siglos y con métodos mucho más sencillos y directos, resolver las ecuaciones que el Ing. Zedeño estudia.

Insistimos muy fuertemente en que tal *dogma*[2] no existe en matemáticas. Éstas se basan en *teoremas* y sus demostraciones, *conjeturas*, o hasta *proposiciones indecidibles*. En ciencia el dogma no existe, por definición las teorías científicas están sujetas a ser revisadas, y, en el caso particular de las matemáticas, la importancia que se otorga al proceso de *demostración*[3] hace que, aún más, la actividad se sitúa en las antípodas de lo que pueda llamarse dogmático.

El sensacionalismo, y sin duda la ignorancia en temas matemáticos, del periodista autor de esta noticia hacen que se compare al Ing. Zedeño con científicos como Isaac Newton o Pierre-Simon de Laplace. Esto es totalmente absurdo a la luz de los resultados obtenidos por el Ing. Zedeño.

Podemos entonces preguntarnos:

- ¿Cómo se enteró el periodista de este "descubrimiento"?
- ¿Cuáles fueron las fuentes del periodista al redactar esta noticia?
- ¿Cuáles fueron los motivos del periodista para considerar esta noticia digna de publicación?
- ¿Hubo una revisión por parte de algún comité editorial del diario El Comercio?

Lo que es aún más grave, es que esta noticia, al no tener autor claramente identificado, no solo involucra a toda la redacción del diario El Comercio sino que además compromete la imagen y el prestigio de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE). En efecto, podemos leer que el Decano de dicha universidad "[...] *asegura que la PUCE tiene un plan de divulgación y de implementación en la clase de ecuaciones diferenciales para los alumnos de carreras de Ingeniería para el 2013*".

Esto equivale a decir que los alumnos de las carreras de Ingeniería de esta universidad van a aprender como algo novedoso, y en términos muy complicados, lo que se conocía desde hace siglos por métodos más sencillos y eficaces.

El Comercio es quizás el diario con mayor impacto en la sociedad ecuatoriana y, gracias a su página internet, puede ser leído por todos alrededor del mundo. Publicar una noticia como esta tiene consecuencias muy graves, tanto para el prestigio de la PUCE como mencionábamos más arriba como para las matemáticas en el Ecuador y es por esta razón que la Sociedad Ecuatoriana de Matemática ha enviado una carta[4] a este diario y estamos a la espera de una acción del comité editorial que rectifique esta noticia: en efecto, anuncios como éstos también muestran el nivel, la seriedad y la calidad del diario.

3. Problemas de forma

El documento que está a nuestra disposición consta de tres capítulos en donde se habla respectivamente de *ecuaciones diferenciales ordinarias* (E.D.O.) *de primer orden y primer grado*, de *sistemas lineales de E.D.O.s de primer orden* y de la *ecuación lineal de orden n*. Este documento está muy mal escrito y dista mucho de lo que se considera un artículo o escrito científico, especialmente en el área de las matemáticas. En efecto, en este documento no aparecen las más mínimas bases de la exposición científica:

1. no se explica claramente qué es lo que se desea demostrar,
2. no se explica cuál es el aporte original del autor,
3. no se indica cuál es el problema abierto que se ha logrado demostrar.

El documento es, en suma, un desfile de cálculos, cuya lectura es difícil, no por la dificultad de éstos, sino por lo críptico y (¿voluntariamente?) confuso de la redacción. Más allá de que el estilo de redacción sea una cuestión relativamente subjetiva, podemos decir que documentos como este son precisamente los que contribuyen a hacer creer al público que alguien *"bueno en matemáticas"* es alguien que es hábil para hacer cálculos y manipular símbolos, dejando de lado la claridad de exposición, haciendo que los cálculos oculten la esencia de las cosas.

Es la obligación del autor demostrar con el mayor detalle y claridad posible al resto de la comunidad científica la validez de sus cálculos, argumentos y construcciones: la comunidad científica no debe tratar de adivinar lo que el

[2] Según el Diccionario de la Real Academia Española: DOGMA:*proposición que se asienta por firme y cierta y como principio innegable de una ciencia.*

[3] entiéndase demostración lógica.

[4] disponible en la página web de la SEdeM.

autor ha deseado escribir.

Los puntos anteriores son más que suficientes para rechazar este documento en cualquier tipo de revista, o al menos para pedir una nueva redacción, independientemente de la originalidad y/o validez de las fórmulas presentadas.

Los lectores que no son matemáticos profesionales y que deseen saber a qué se parece un artículo matemático están invitados a visitar las bases de datos `http://arxiv.org/archive/math` o `http://hal.archives-ouvertes.fr/` , o incluso las páginas personales de los matemáticos investigadores ecuatorianos, en donde se encuentran disponibles una multitud de ejemplos: un simple vistazo permitirá darse cuenta de la gran diferencia que existe (al menos en la forma) entre este documento y un verdadero artículo científico.

Indiquemos antes de entrar en detalles de orden técnico, que el método descrito en el documento consiste en resolver ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando un algoritmo de punto fijo y una aproximación en series enteras. Este documento no presenta ninguna novedad pues los ejemplos presentados son conocidos desde un par de siglos. Este punto es mucho más grave que los simples aspectos de forma evocados anteriormente y es un motivo mucho más serio para descartar totalmente este documento en cualquier revista de investigación, pero este aspecto será desarrollado más ampliamente en la sección a continuación.

Los lectores que deseen conocer un poco más sobre las raíces históricas de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ver la sección 5.

4. Problemas de fondo

Como anunciado en la introducción, el documento .pdf que disponemos no contiene ninguna explicación sobre las intenciones del autor. De manera que nos es imprescindible utilizar la noticia de El Comercio para comprender (por no decir adivinar) las motivaciones y objetivos del investigador y es por esta razón que hemos dividido nuestro análisis en tres partes.

La primera parte puede considerarse como una revisión en una revista científica del documento del Ing. Zedeño, pero únicamente del archivo .pdf a nuestra disposición. Como vamos a ver, es suficiente leer las primeras páginas para invalidar completamente el documento: tal como están redactados, los cálculos son evidentemente falsos.

La segunda parte utiliza las informaciones de la noticia de El Comercio para analizar el método descrito en el documento. Esta parte es mucho más interesante pues creemos que es posible comprender las ideas del Ing. Zedeño y que éstas, una vez traducidas al lenguaje matemático, no están del todo mal, pero lastimosamente no aportan ninguna novedad a lo ya conocido en las matemáticas actuales pues estudian casos absolutamente triviales.

Finalmente, la última parte muestra los límites del método propuesto en el documento que, no solo vuelve complicados procedimientos sencillos en los casos más simples, sino que vuelve inextricable algunas computaciones en casos ligeramente más sofisticados.

4.1. Del documento del Ing. Zedeño

- **Página 1, ecuación 1.** El autor escribe la siguiente ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sin dar ninguna definición y sin tomar ninguna precaución sobre las funciones $M(\cdot,\cdot)$ y $N(\cdot,\cdot)$. Por los argumentos de estas funciones podemos suponer que son aplicaciones que están definidas sobre dos variables. Pero no sabemos en dónde se encuentran estas variables[5]. Otro punto realmente importante es que no hay ninguna hipótesis sobre la regularidad de las funciones M y N: ¿son acaso funciones $\mathcal{C}^\infty$? ¿son funciones analíticas?

- **Página 1, ecuación [A].** Existe una confusión entre la variable y y la función $y(x)$. En efecto, según la fórmula 2 se tiene $y' = g(x,y)$, en donde $g(x,z)$ es una función de dos variables x, z, si se admite la ecuación 3 entonces se obtiene la ecuación:
$$y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x))$$
esto invalida completamente la ecuación 6 de la página 1 que es la base de casi todo el artículo.

- **Página 2, cuarta línea empezando desde arriba.** Se estudia el ejemplo $y'(x) = y(x)$, entonces y es una función que depende de x. Sin embargo, en la definición de f_0 se tiene $f_0 = \int^x g\ dx = \int^x y\ dx$ y sorprendentemente la función $y(x)$ se convierte en una variable y que es independiente de x y el autor escribe entonces

[5] podrían ser, por ejemplo, elementos de un espacio vectorial localmente convexo, puntos en una variedad algébrica o en una variedad diferencial, pertenecer a un conjunto fractal en cuatro o veintisiete dimensiones, etc.

$\int^{x} y\,dx = yx$. Esto es evidentemente falso y hay sin duda un error de notación.

- **Página 6, ejemplo 1.3.** El autor estudia una ecuación de Riccati de tipo $y' = (3x + y^2)$ y realiza el mismo error de confundir la función $y(x)$ con la variable y. Sin embargo, al ser los cálculos un poco más largos, es incapaz de encontrar una solución puesto que la identificación de la serie resulta más delicada. Es por esta razón que se tiene la fórmula enmarcada en la página 7 que no es ninguna solución general: no se estudia la convergencia de la serie ahí expuesta. Ante este dificultad, el autor decide estudiar en el punto particular $x = 0{,}1$ la solución y en la página 8 da una lista de valores y aduce que existe convergencia en los diferentes valores de la solución. Lastimosamente, no es estudiando los 100 primeros valores que se puede obtener la convergencia de una sucesión y en el artículo no hay ninguna discusión sobre esta convergencia.

Tal como está redactado el método del autor es incorrecto y no contiene casi ninguna originalidad. En efecto, este documento solo se presentan dos tipos de ecuaciones: las ecuaciones lineales $y' = P(x)y + Q(x)$ y las ecuaciones de tipo Riccati $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$. Estas ecuaciones pueden ser tratadas por otros métodos y son bien conocidas desde hace, al menos, un par de siglos. El Ing. Zedeño y el periodista de El Comercio deberían leer más detenidamente el libro [3] (citado por el mismo Ing. Zedeño en su documento) para darse cuenta de la falta de originalidad del método propuesto.

4.2. Más allá del documento y de las notaciones utilizadas: el método del Ing. Zedeño

Como hemos visto en la sección anterior, si se sigue a la letra el texto, el documento se debe descartar inmediatamente. Sin embargo, es necesario tratar de comprender qué mismo quiso decir el Ing. Zedeño.

Notaciones: sea $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, que supondremos al menos de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, cuya derivada $\frac{dy}{dx}$ notaremos $y'(x)$. La función $g(\cdot,\cdot)$ es una función de dos variables reales a valores en $\mathbb{R}$ y para evitar confusiones denotaremos la segunda variable por z, es decir $g(x,z)$.

En notaciones matemáticas usuales se trata de resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} y'(x) = g(x, y(x)) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

La idea propuesta en el documento consiste en reemplazar este problema por la búsqueda de un punto fijo. Es decir, para un $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, se trata de encontrar una función y tal que

$$y(x) = f(x, y(x)) \tag{2}$$

en dónde $f(\cdot,\cdot)$ es una función que verifica

$$\begin{cases} f(0,z) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,z) = \left(1 - \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\right) g(x,z). \end{cases} \tag{3}$$

Proposición 4.1 *Si $y(x)$ es un punto fijo del problema (2) y si $f(\cdot,\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ que verifica (3), entonces $y(x)$ es solución de la ecuación (1).*

Prueba. Definimos la función $H(x) = y(x) - f(x, y(x))$ que es, por hipótesis, idénticamente nula. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 0 = H'(x) &= y'(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) - y'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x)) \\ &= y'(x)\left(1 - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x))\right) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \end{aligned}$$

dado que la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ verifica (3) podemos escribir

$$0 = H'(x) = y'(x)\left(1 - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x))\right) - \left(1 - \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\right) g(x,z)$$

es decir que se tiene

$$0 = \Big(y'(x) - g(x, y(x))\Big)\left(1 - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x))\right).$$

Como la función $f(0,z)$ es idénticamente nula, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial z}(0,z) = 0$, de manera que sobre una vecindad de $x = 0$ se tiene $y'(x) - g(x, y(x)) = 0$ y como $y(0) = 0$ se obtiene una solución de la ecuación (1). ■

De esta manera se ha transformado el problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria en la búsqueda de un punto fijo de la función $f(\cdot,\cdot)$. Tenemos entonces *dos* problemas:

1) encontrar la función $f(\cdot,\cdot)$ que verifica (3),

2) encontrar el punto fijo $y(x) = f(x, y(x))$.

Veamos cómo resolver estos dos puntos:

$\Longrightarrow$ Para resolver el primer punto observemos que la hipótesis sobre la función $f(\cdot,\cdot)$ puede reescribirse de la siguiente forma:

$$f(x,z) = f_0(x,z) + T(f)(x,z) \tag{4}$$

en dónde hemos escrito

$$f_0(x,z) = \int_0^x g(s,z)ds \qquad \text{y} \qquad T(f)(x,z) = -\int_0^x g(s,z)\frac{\partial f}{\partial z}(s,z)ds. \tag{5}$$

Notamos, para continuar, que el problema (4) es lineal y puede expresarse como $(Id - T)(f) = f_0$. Utilizando las series de Neumann[6] obtenemos que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n f_0. \tag{6}$$

Es necesario demostrar la convergencia de esta serie, tenemos entonces el siguiente teorema que estudia esta serie:

Teorema 1 *Si la función $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función polinomial de grado d en la segunda variable, es decir si*

$$g(x,z) = \sum_{k=0}^{d} g_k(x) z^k,$$

y si para todo $x \in]0, \lambda[$ se tiene que los coeficientes g_k son acotados, es decir si $\sup\limits_{0<x<\lambda} |g_k(x)| \leq M$ para todo $k = 1, ..., d$. Entonces existe un real λ_0 tal que $0 < \lambda_0 < \lambda$ y tal que la serie (6) converge uniformemente sobre todo compacto de $[0, \lambda_0] \times \mathbb{R}$.

Demostración. Empezamos notando que con estas hipótesis sobre $g(\cdot,\cdot)$ se tiene, por la definición de f_0 y del operador T dada en la expresión (5), que $P_n(x,z) = T^n(f_0)(x,z)$ es un polinomio en z de grado $d_n = 1 + (d-1)(n+1)$. Podemos entonces expresar P_n por medio de la fórmula

$$P_n(x,z) = \sum_{k=0}^{d_n} \alpha_{k,n}(x) z^k$$

Vemos ahora que, utilizando la hipótesis sobre los coeficientes $g_k(x)$ y la definición de la función f_0, se tiene la mayoración $|\alpha_{k,0}(x)| \leq Mx$ para todo $0 \leq k \leq d$. Por recurrencia, calculando $T^{n+1}(f_0) = T(T^n(f_0))$ se tiene

$$\begin{aligned} T^{n+1}(f_0)(x,z) &= -\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{d} g_j(s) z^j\right) \frac{\partial}{\partial z} T^n(s,z) ds \\ &= -\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{d} g_j(s) z^j\right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{k=0}^{d_n} \alpha_{k,n}(x) z^k\right) ds \end{aligned}$$

Derivando, desarrollando e identificando los coeficientes $\alpha_{k,n}(x)$ se tiene

$$\alpha_{k,n+1}(s) = -\int_0^x \sum_{j=0}^{d} g_j(x) \alpha_{k+1-j,n}(s)(k+1-j) ds. \tag{7}$$

[6] Carl Neumann (1832-1925), matemático alemán.

Esto nos permite notar que, para todo entero $n \geq 0$, existe una constante E_{n+1} tal que $|\alpha_{k,n+1}(x)| \leq E_{n+1}x^{n+2}$: basta para ello utilizar la hipótesis de acotación de los coeficientes g_k. Utilizando la fórmula de recurrencia (7) sobre los coeficientes $\alpha_{k,n+1}$ y fijando $E_0 = M$ se obtiene la mayoración

$$\begin{aligned} E_{n+1} &\leq \frac{1}{n+2}(d+1)ME_nd_n = ME_n(d+1)\left(\frac{1}{n+2}+(d-1)\frac{n+1}{n+2}\right) \\ &\leq Md(d+1)E_n \\ &\leq M^{n+1}d^{n+1}(d+1)^{n+1}E_0. \end{aligned}$$

De esto se concluye que si $0 < x < \lambda_0$ con $\lambda_0 < \lambda$ es tal que $Md(d+1)\lambda_0 < 1$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n$ es uniformemente convergente sobre todo compacto de $]0, \lambda_0[\times\mathbb{R}$. ■

Con este teorema hemos verificado la convergencia de la serie (6), proporcionando así cierta coherencia para obtener un algoritmo que permite construir iterativamente la función f a partir del dato inicial f_0.

$\Longrightarrow$ Para el segundo punto, es posible encontrar el punto fijo de varias formas. Para ello, si consideramos la función $g(\cdot,\cdot)$ como una función analítica de la variable *compleja* z, con las mismas estimaciones se obtiene que la función $f(x,z)$ es una función entera. Por el punto anterior teníamos:

$$|f(x,z)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{d_n\geq k} Mx(Md(d+1)x)^n|z|^k$$

De manera que si $0 \leq x \leq \lambda_0$ y si $Md(d+1)\lambda_0|z| < 1$ se puede escribir

$$|f(x,z)| \leq Mx\frac{1}{1-Md(d+1)x}\frac{1}{1-Md(d+1)x|z|}$$

Fijemos ahora $r > 0$ y fijemos λ_0 suficientemente pequeño como para tener

$$Md(d+1)\lambda_0 r < 1 \qquad \text{y} \qquad Mx\frac{1}{1-Md(d+1)x}\frac{1}{1-Md(d+1)x|z|} \leq r/4$$

sobre $[0, \lambda_0] \times B(0, r)$. Si $r/2 < r_0 < r$ podemos aplicar el teorema de Rouché[7] a la función $G(z) = z - f(x, z)$ para ver que esta función G posee un solo cero en la bola $|z| < r_0$. Además, este cero puede calcularse por medio de la fórmula de los residuos:

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_0}\frac{zG'(z)}{G(z)}dz.$$

El principal interés de esta fórmula es que justifica el hecho siguiente: si $y_n(x)$ es el punto fijo de $y_n = f_n(x, y_n)$ con $f_n = \sum_{k=0}^{n} T^k(f_0)$; entonces y_n converge uniformemente hacia y sobre $[0, \lambda_0]$.

Observación 4.1 Nótese bien que según este método, para resolver *un* problema, tenemos que encontrar la solución de *dos* problemas: la construcción iterativa de f y la obtención del punto fijo $y = f(x, y)$. Si bien se tiene la justificación matemática de este método con las líneas anteriores, la resolución práctica de estos dos problemas puede ser engorrosa: en el caso del documento, el autor realiza una identificación paso a paso que, además de ser larga, es muy incómoda.

Observación 4.2 En los casos estudiados en el documento se tiene:

- Ejemplo 1.1, página 3: $g(x, z) = z$
- Ejemplo 1.2, página 4: $g(x, z) = x - z$
- Ejemplo 1.3, página 6: $g(x, z) = 3x + z^2$

Estos ejemplos son totalmente triviales. Los lectores que deseen ver cómo se resuelven de forma clásica estos problemas pueden ver el libro [3] y podrán comparar los diversos métodos allí expuestos con el método propuesto por el Ing. Zedeño. Estamos convencidos que solo los alumnos que gusten de la dificultad innecesaria o los profesores que deseen martirizar a sus estudiantes utilizarán el método del Ing. Zedeño.

[7] Eugène Rouché (1832-1910), matemático francés. Ver [2] para el enunciado y la demostración de este teorema.

Aplicación del método del Ing. Zedeño a las ecuaciones lineales

En la subsección 1.1, página 8, el autor estudia las ecuaciones del tipo siguiente:

$$\begin{cases} y'(x) = P(x)y + Q(x) \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{8}$$

La solución de este tipo de ecuaciones es totalmente clásica como lo veremos en la sección 5 y está dada por la expresión:

$$y(x) = e^{\int_0^x P(s)ds}\left(y_0 + \int_0^x e^{-\int_0^\sigma P(s)ds} Q(\sigma)d\sigma\right). \tag{9}$$

Por comodidad, vamos a suponer en los cálculos a continuación que $y_0 = 0$.

El método del documento consiste en hacer un cambio de variable $\rho(x) = \displaystyle\int_0^x P(s)ds$ para obtener la ecuación

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + \Psi(\rho) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Se tiene entonces que $g(\rho, z) = z+\Psi(\rho)$ y se trata de encontrar la función $f(\rho, z)$, solución de $\frac{\partial}{\partial\rho}f = (1-\frac{\partial}{\partial z}f)(z+\Psi(\rho))$ (recordar la fórmula (3)). Para ello se escribe:

$$f_0(\rho, z) = \int_0^\rho g(s, z)ds = \int_0^\rho z + \Psi(s)ds = z\rho + \int_0^\rho \Psi(s)ds$$

y

$$f_{n+1}(\rho, z) = \int_0^\rho (z + \Psi(s))\left(1 - \frac{\partial}{\partial z}f_n(s, z)\right)ds = A_{n+1}(\rho)z + B_{n+1}(\rho),$$

en donde hemos escrito $A_0(\rho) = \rho$ y $B_0(\rho) = \displaystyle\int_0^\rho \Psi(s)ds$. De esta forma se obtienen las fórmulas generales

$$A_{n+1}(\rho) = \int_0^\rho (1 - A_n(s))ds, \qquad B_n(\rho) = \int_0^\rho \Psi(s)(1 - A_n(s))ds.$$

Estos cálculos nos llevan a la expresión $A_n(\rho) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\rho^k}{k!}$ de donde se deduce que $f(\rho, z) = (1 - e^{-\rho})z + \displaystyle\int_0^\rho \Psi(s)e^{-s}ds$. Una vez que tenemos esta función f, es necesario encontrar un punto fijo, para ello basta escribir

$$y = (1 - e^{-\rho})y + \int_0^\rho \Psi(s)e^{-s}ds$$

y se encuentra que $y(\rho) = \displaystyle\int_0^\rho \Psi(s)e^{\rho-s}ds$, es decir $y(x) = e^{\rho(x)}\left(\displaystyle\int_0^x Q(s)e^{-\rho(s)}ds\right)$. Utilizando la definición de $\rho(x)$ se obtiene entonces la solución general dada en la fórmula (9).

4.3. Límites del método del Ing. Zedeño

Hemos visto que en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales el método propuesto en este documento funciona en casos muy simples, aunque es muchísimo más complicado de lo que se sabía hacer antes como lo veremos un poco más adelante.

Este método empieza a mostrar sus límites con las ecuaciones de tipo Riccati. Estas ecuaciones son del tipo

$$\begin{cases} y'(x) = P(x)y^2(x) + Q(x)y + R(x) \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{10}$$

En donde se puede suponer, por simplicidad, que P, Q, R son polinomiales: es el caso del ejemplo 1.3 tratado en la página 6 en donde se tiene $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = 3x$.

Observemos que la ecuación (10) no puede resolverse explícitamente y es necesario desarrollar un método basado en aproximaciones numéricas para determinar su solución. Una vez más, existen varios métodos para lograrlo y el método de Euler[8] permite hacerlo muy rápidamente, ver [3] para más detalles sobre el método de Euler.

Si queremos utilizar el método del documento del Ing. Zedeño, debemos aplicar el desarrollo explicado en la página anterior. Vemos en particular que para todo $n \geq 1$, para x fijo, la aproximación f_n es un polinomio de grado $n+2$, de manera que para encontrar el punto fijo $y_n = f_n(x, y_n)$ es necesario resolver una ecuación de grado $n+2$. Esto es una fuente de error, pues el cálculo de raíces no es un problema estable, y es una complicación absolutamente inútil si se la compara con otros métodos existentes como lo veremos en la sección siguiente.

Otra limitación muy seria proviene del hecho que este método se aplica únicamente a ecuaciones con coeficientes analíticos: basta tomar un coeficiente como $e^{-\frac{1}{x^2}}$ para que sea totalmente imposible utilizar este método.

En regla general, este método es muy engorroso, largo, poco útil y solo se aplica a casos triviales. Los métodos tradicionales que se pueden leer en el libro [3] son muchísimo más prácticos.

5. Un poco de historia

- **Siglo XVII**: las ecuaciones diferenciales se estudian desde el desarrollo del cálculo diferencial por Newton[9] y Leibniz[10]. Una de las ecuaciones más elementales son las ecuaciones lineales de primer orden que han sido tratadas anteriormente con el problema (8):

$$\begin{cases} y'(x) = P(x)y(x) + Q(x) \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

en donde P, Q son dos aplicaciones definidas sobre un intervalo I a valores reales. Este tipo de ecuaciones han sido estudiadas por Bernoulli[11] y por Leibniz cerca del año 1695, es decir desde hace un poco más de trescientos años. La idea es escribir $y(x) = u(x)v(x)$ con $u(0) = 1$ y $v(0) = y_0$, de esta manera se obtiene la siguiente identidad $v(u - Pu) = Q - v'u$, de manera que basta resolver los dos problemas siguientes:

$$\begin{cases} u' = Pu \\ u(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} v' = \frac{Q}{u} \\ v(0) = y_0 \end{cases}$$

cuyas soluciones respectivas son $u(x) = e^{\int_0^x P(s)ds}$ y $v(x) = y_0 + \displaystyle\int_0^x Q(s)e^{-\int_0^s P(\sigma)d\sigma}$. Se obtiene de esta manera la fórmula general dada en la expresión (9):

$$y(x) = e^{\int_0^x P(s)ds}\left(y_0 + \int_0^x e^{-\int_0^\sigma P(s)ds}Q(\sigma)d\sigma\right).$$

Recalcamos la claridad y sencillez de estos cálculos por oposición a los realizados en la página 8 siguiendo el método del Ing. Zedeño.

En cuanto a las ecuaciones de tipo Riccati[12] se las puede escribir de forma simplificada como $y' = a(x)y^2 + b(x)x^n$ y se sabe que este tipo de ecuaciones no admite en toda generalidad una formulación exacta: esta ecuación es integrable si n es igual 2 o de la forma $-4m/(2m+1)$ ó $-4m/(2m-1)$, siendo m un entero positivo. Esto ha sido estudiado un poco más recientemente por Vessiot[13].

- **Siglo XVIII**: la aproximación de funciones por medio de polinomios ha sido desarrollada por Taylor[14] alrededor del año 1712, de manera que el uso de series enteras ha sido extensamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias desde hace mucho tiempo, especialmente por Euler y Lagrange[15].

[8] Leonhard Euler (1707-1783), matemático y físico suizo.
[9] Isaac Newton (1643–1727), matemático inglés
[10] Gottfried Leibniz (1646-1716), matemático alemán.
[11] Jacques Bernoulli(1654-1705), matemático suizo.
[12] Jacopo Riccati (1676-1754), matemático italiano.
[13] Ernest Vessiot (1865-1952), matemático francés.
[14] Brook Taylor (1685-1731), matemático inglés.
[15] Joseph de Lagrange (1736-1813), matemático italiano.

- **Siglo XIX**: la existencia de las soluciones de las ecuaciones así como algunos problemas de convergencia de las series no habían sido una preocupación primordial de los matemáticos anteriores a este siglo. Es Cauchy[16] quien en 1820 demuestra la existencia y la unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones bajo condiciones comúnmente denominadas de Cauchy-Lipschitz[17] y estudia rigurosamente los problemas de aproximación. Es en 1837 que Liouville[18] utiliza un argumento de recurrencia para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

  Veamos entonces un ejemplo de cómo aproximar las soluciones por medio de un algoritmo mucho más simple que el propuesto en el documento estudiado: partimos de la ecuación $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$, con $y(0) = y_0$ y en donde suponemos que P, Q, R son polinomios (pues es el caso tratado por el Ing. Zedeño).

  El punto de partida está dado por la función constante $y_0(x) = y_0$ y definimos

  $$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_0^x P(s)y_n^2(s) + Q(s)y_n(s) + R(s)ds.$$

  Vemos entonces que y_n es un polinomio en x y que $y_{n+1} - y_n$ es divisible por x^{n+1}. Finalmente, para obtener el desarrollo de Taylor de orden n es suficiente estudiar los términos de y_n de grado inferior a n. Este proceso es muchísimo más simple que el obtenido por el método del Ing. Zedeño pues para obtener el valor aproximado de $y(x)$ en un punto no hace falta resolver ecuaciones de grado cada vez mayor como se lo puede observar en el documento página 8. Tomemos pues el ejemplo ahí estudiado, es decir cuando $P = 1$, $Q = 0$ y $R = 3x$ con $y_0 = 1$. Se tiene que $y_1(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2$ mientras que $y_2(x) = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{20}x^5$. De esta manera, si se desea conocer el valor que y en un punto x particular, es suficiente evaluar este polinomio.

- **Siglo XX**: con los teoremas de existencia y unicidad junto con los desarrollos teóricos obtenidos en el siglo anterior y con la llegada de computadores, los problemas actuales relacionados a las ecuaciones diferenciales ordinarias giran más bien en torno a los métodos de resolución numérica por medio de algoritmos estables.

6. Conclusiones

1) El documento, tal como está disponible, del Ing. Zedeño está mal redactado y carece de rigor científico.
2) Para comprenderlo ha sido necesario hacer un verdadero trabajo[19] de *traducción*.
3) El método presentado no resuelve ningún problema abierto, es decir que los problemas que logra resolver son totalmente clásicos y bien conocidos.
4) El método propuesto no es más simple que los métodos existentes sino todo lo contrario.
5) Sin embargo, la idea general del método es relativamente interesante, pero las perspectivas prácticas son muy limitadas: si se trabaja teóricamente existen métodos más directos; y, si se trabaja numéricamente, la utilización sistemática de las derivadas de la función f no es ninguna garantía de estabilidad para un eventual algoritmo basado en este método -sin hablar del cómputo de las raíces de los polinomios necesarias a cada iteración.

7. Comentarios y sugerencias

7.1. Al autor

Una redacción matemática más rigurosa y clara permitiría la discusión de estos resultados con un mayor número de colegas ecuatorianos o extranjeros, que siempre están a la escucha de nuevos desarrollos en las matemáticas. Son éstos los espacios apropiados para discutir, analizar y profundizar los descubrimientos científicos.

Antes de ir al notario y de convocar un periodista (cosa que presumiblemente ha sucedido), recomendamos discutir los resultados con matemáticos profesionales, en los espacios existentes para tales fines. Estando en la PUCE, basta cruzar la calle para ir a la Escuela Politécnica Nacional (EPN), o también se puede convocar a la Sociedad Ecuatoriana de Matemática (SEdeM) o hasta a la asociación AMARUN.

El quehacer científico se enriquece de discusiones e intercambios y esperamos que el Ing. Zedeño prosiga sus investigaciones en esta vía.

[16] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés.
[17] Rudolph Lipschitz (1832-1903), matemático alemán.
[18] Joseph Liouville (1809-1882), matemático francés.
[19] recuérdese que es el autor quien debe convencer por sus argumentos a la comunidad científica, ésta no debería perder tiempo tratando de adivinar lo que quiso decir el autor.

7.2. Al diario El Comercio

Un periodista no tiene porqué ser un experto en matemáticas. Es por esta razón que antes de publicar una noticia debe tomar sus precauciones y verificar sus fuentes, ya sea con expertos (matemáticos de las diversas universidades del país o del extranjero), ya sea con el organismo oficial que es la SEdeM o con la asociación AMARUN.

Publicar una noticia falsa es un asunto suficientemente grave como para que el comité editorial del diario El Comercio reflexione sobre sus fuentes y métodos de publicación. Lo mínimo que puede esperarse de un medio de difusión respetable y serio como El Comercio es una rectificación de esta noticia en un espacio similar.

Finalmente, si desean dar un espacio a noticias científicas, el Ecuador cuenta con centros de investigación en matemáticas de alto nivel en la EPN, ESPE, USFQ, de manera que los periodistas de El Comercio podrían ir a entrevistar a los profesores de estas instituciones y recalcar sus logros científicos, esto cambiaría un poco la rutina de las noticias sobre eventos espaciales que aparecen regularmente en la página web de este diario.

7.3. A la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE)

Nos permitimos hacer unas pequeñas sugerencias a las autoridades de la PUCE:

1) Revisar de forma urgente la intención de incluir los métodos del Ing. Zedeño en los planes de estudio de los estudiantes de ingeniería. Para hacer una reforma en el programa, es importante contar con asesoramiento especializado y competente,

2) pedir de forma urgente que El Comercio rectifique la noticia,

3) incorporar un matemático al cuerpo docente de esta institución.

* * *

Agradecimientos: la sección 4.2 ha sido discutida con la ayuda del Profesor Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, director del laboratorio de matemáticas de la universidad de Evry (Francia) y su aporte ha sido fundamental.

Referencias

[1] Histoire des équations, Wikipedia.

[2] H. Queffélec, C. Zuily, *Eléments d'Analyse.* 2nda edición, Dunod (2002).

[3] D. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.* 6ta edición, International Thomson (1997)

Diego Chamorro

Laboratoire d'Analyse et de Probabilités
Université d'Evry Val d'Essonne
&
Asociación Amarun
www.amarun.org

23, Bd de France,
91037 Evry

diego.chamorro@univ-evry.fr