AMARUN
www.amarun.org

Comisión de Pedagogía - Oscar Jarrín
Descripciones deterministas de la turbulencia en las ecuaciones de Navier-Stokes (Nivel 3).

__Lección n°3__: **Un nuevo modelo determinista de la mecánica de fluidos**

USFQ, noviembre 2015

Índice

Introducción

En la lección anterior presentamos el modelo determinista de P. Constantin para el estudio de la ley disipación de energía (según la teoría K41) para un fluido viscoso e incompresible que se encuentra en el espacio entero $\mathbb{R}^3$ y sobre el cual actúa una fuerza exterior f tal que $supp\, \widehat{f} \subset B(0, k_0)$ con $k_0 > 0$. Dicho modelo está dado por las ecuaciones de Navier - Stokes

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u + u \cdot \nabla\, u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \text{sobre} \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3. \\ \nabla \cdot v = 0, \\ u(0) = u_0, \end{array} \right. \qquad (1)}$$

en donde considerando la longitud característica $L_c = \frac{F}{\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}}$ (con $F = \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$ y $\ell_0 := \frac{1}{k_0}$) se obtiene la mayoración de la tasa de disipación de energía

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L_c} + \frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{U^3}{L_c}}, \tag{2}$$

donde

$$U := \left(\limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \nu \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3}.$$

En este marco el objetivo de esta lección es, en primer lugar, explicar por qué la mayoración (2) carece de un sentido riguroso y con el objetivo de dar sentido a esta expresión obtendremos un nuevo modelo de la mecánica de fluidos en donde estudiaremos la ley de disipación de energía.

1. Los errores en el modelo determinista de P. Constantin

Existen dos errores en este modelo determinista:

(1) La definición de la longitud característica del fluido L_c.

La longitud característica L_c definida por Constantin aparece de manera natural en los cálculos para deducir la mayoración de la tasa de disipación (2) sin embargo, para obtener esta mayoración es necesario que la fuerza exterior f verifique la desigualdad siguiente

$$\|\nabla \otimes f\|_{L^2} \leq c\, k_0^{\frac{3}{2}} \|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}.$$

El error se encuentra entonces en el hecho que, bajo las hipótesis de f, la desigualdad arriba escrita no se verifica de manera general y de este modo la deducción de la mayoración (2) no es totalmente clara.

(2) La definición de la velocidad característica del fluido U.

Al igual que el caso periódico es necesario asegurarse que $U < +\infty$ para que la mayoración (2) tenga sentido, para ello recordemos que, en este modelo, consideramos un fluido que se encuentra en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ en donde el campo de velocidades $u(t,x)$ está dado por la solución de Leray del sistema de Navier-Stokes (1), es decir, una solución en el sentido de las distribuciones (también llamada solución débil) que verifica la desigualdad de energía: para todo $T \geq 0$

$$\|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot u\, dxdt. \tag{3}$$

A partir de esta desigualdad se muestra la siguiente mayoración de la cantidad de energía cinética

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + t\frac{\|f\|_{\dot{H}^{-1}}^2}{2\nu}$$

la cual nos provee un control de $\|u(t)\|_{L^2}^2$ con respecto al tiempo t. Si a partir de esta desigualdad construimos la velocidad característica U vemos que

$$U^2 = \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \leq \frac{1}{\ell_0^3}\|u_0\|_{L^2}^2 + \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{T}{4\nu \ell_0^3}\|f\|_{\dot{H}^{-1}}^2 = +\infty.$$

Es decir, cuando el fluido se encuentra en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ en el estado actual de nuestro conocimiento sobre las soluciones de Leray del sistema de Navier-Stokes (1) no sabemos controlar la cantidad $\|u(t)\|_{L^2}^2$ (energía cinética) cuando $t \longrightarrow +\infty$ de modo que la velocidad característica U sea una cantidad finita.

En otras palabras, al contrario que el caso periódico, ahora ya no tenemos a nuestra disposición la desigualdad de Poicaré y de esta manera la desigualdad de energía (3) no es suficiente para asegurar que $U < +\infty$ y por lo tanto la mayoración de la tasa de disipación (2) carece de un sentido riguroso.

Observación 1 *Por el contrario la desigualdad de energía (3) es suficiente para mostrar que la tasa de disipación de energía, definida por la cantidad*

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3},$$

es una cantidad finita. En efecto, a partir de la desigualdad de energía se muestra que

$$\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{T}{\nu}\|f\|_{\dot{H}^{-1}}^2,$$

de donde se obtiene la mayoración $\varepsilon \leq \dfrac{\|f\|_{\dot{H}^{-1}}^2}{\nu \ell_0^3} < +\infty$.

$\Rightarrow$ *La diferencia en el hecho que la desigualdad de energía no es suficiente para mostrar que* $U < +\infty$ *mientras que a partir de ella se deduce fácilmente que* $\varepsilon < +\infty$ *radica en el hecho que, en el caso de desigualdad característica* U *obtenemos un control de la cantidad* $\|u(t)\|_{L^2}^2$ *la cual debemos integrar sobre el intervalo* $[0,T]$ *y es ahí donde perdemos el control cuando* $T \longrightarrow +\infty$*. De otra parte la desigualdad de energía nos provee un control directo de la cantidad* $\int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt$ *y de esta manera podemos controlar esta cantidad cuando* $T \longrightarrow +\infty$.

2. Un nuevo modelo determinista de la mecánica de fluidos

Nos concentramos en el segundo error en el modelo de Constantin: es necesario construir un campo de velocidades $u(t,x)$ de manera que podamos controlar la energía cinética $\|u(t)\|^2_{L^2}$ cuando $t \longrightarrow +\infty$ de suerte que la velocidad característica U sea una cantidad finita.

Para ello la idea consiste en modificar las ecuaciones de Navier-Stokes introduciendo un término de truncatura definido a nivel de Fourier por

$$\widehat{P_2 u}(\xi) = \mathbb{1}_{|\xi|\leq k_2}\widehat{u}(\xi)$$

donde $0 < k_2 < k_0$ es la frecuencia de truncatura. Se observa claramente de la definición de $P_2 u$ que *supp* $\widehat{P_2 u}(\xi) = 0$ para todo $|\xi| \geq k_2$ por lo recibe el nombre de término de truncatura de las altas frecuencias.

De esta manera, para $\alpha > 0$ un parámetro que fijaremos más tarde, obtenemos las ecuaciones de Navier-Stokes modificadas

$$\partial_t u + u\cdot\nabla\, u - \nu\Delta u + \nabla p = f - \alpha P_2 u,$$

en donde para una fuerza exterior f y un dato inicial u_0, siguiendo el mismo proceso de construcción de soluciones de Leray para las ecuaciones de Navier-Stokes clásicas, se muestra el siguiente resultado.

Teorema 1 *(Chamorro, Jarrín, Lemarié-Rieusset, 2015) Sean $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ una fuerza exterior estacionaria a divergencia nula tal que supp $\widehat{f} \subset \mathcal{C}(0,k_1,k_0)$ y $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a divergencia nula. Para todo $\alpha > 0$ y $0 < k_2 < k_1 < k_0$ existe $u \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solución débil del sistema de Navier-Stokes modificado*

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla\, u - \nu\Delta u + \nabla p = f - \alpha P_2 u, \quad \textit{sobre} \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3. \\ \nabla\cdot u = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4}$$

tal que verifica la desigualdad de energía: para todo $T \geq 0$

$$\|u(T)\|^2_{L^2} + 2\nu\int_0^T \|\nabla\otimes u(t)\|^2_{L^2}dt \leq \|u_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} f\cdot u\, dxdt - 2\alpha\int_0^T \|P_2 u(t)\|^2_{L^2}dt. \tag{5}$$

⇒ De esta manera, la ecuación de base del nuevo modelo determinista de la mecánica de fluidos, en donde estudiaremos la ley de disipación de energía según la teoría K41, está dada por el sistema de Navier-Stokes modificado (4) en donde, de ahora en adelante, en todas las formulas que escribiremos a continuación el campo de velocidades del fluido $u(t,x)$ es la solución débil de este sistema.

Observación 2 *Observamos que la fuerza exterior f está localizada a nivel de Fourier en la corona $\mathcal{C}(0,k_1,k_0) := \{\xi \in \mathbb{R}^3 : k_1 < |\xi| < k_0\}$. En donde, al igual que el modelo de Constantin, $|\xi| < k_0$ representa el hecho que la fuerza exterior actúa sobre el fluido solo en la grandes escalas y por lo tanto en la bajas frecuencias. Por otro lado como además $k_1 < |\xi|$, con $k_2 < k_1$, se tiene que supp $\widehat{P_2 u} \cap$ supp $\widehat{f} = \emptyset$ y por lo tanto $\int_{\mathbb{R}^3} P_2 u\cdot f dx = 0$ lo cual nos permitirá mostrar la estimación de la disipación de energía que veremos más adelante.*

A partir de la desigualdad de energía (5) se obtiene el siguiente control de la cantidad de energía cinética respecto al tiempo: existe una constante $\beta > 0$ tal que para todo tiempo $t \geq 0$

$$\|u(t)\|^2_{L^2} \leq \|u_0\|^2_{L^2} e^{-\frac{\beta}{2}t} + \frac{4}{\beta}\|f\|^2_{L^2}(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}).$$

Este control de la energía cinética nos permite mostrar que, para $u(t,x)$ solución débil del sistema de Navier-Stokes modificado (4), la velocidad característica verifica

$$U^2 \leq \frac{4}{\ell_0^3\beta}\|f\|^2_{L^2} < +\infty,$$

es decir, en el marco de las ecuaciones de Navier-Stokes modificadas podemos asegurar que U es una cantidad finita y por lo tanto las estimaciones que encontraremos a partir de esta cantidad tienen un sentido riguroso.

Observación 3 *Notemos además que, de la desigualdad de energía (5) obtenemos la desigualdad de energía clásica (3) a partir de la cual podemos mostrar que la tasa de disipación de energía ε es una cantidad finita.*

3. La ley de disipación de energía en el nuevo modelo determinista

Las estimaciones de la tasa de disipación de energía según la teoría K41 están basadas en dos ideas principales.

(A) Una nueva longitud característica del fluido.

Necesitamos en primer lugar una definición de longitud característica del fluido $L > 0$ a partir de la cual se quiere mostrar que $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$ cuando $Re >> 1$. Siguiendo la idea de Constantin esta longitud característica está relacionada a la fuerza exterior f de esta manera definimos

$$L = \frac{\ell_0}{\gamma}$$

donde:

i) $\ell_0 := \frac{1}{k_0}$ es siempre la escala inicial, es decir, la más grande escala de longitud a la cual la fuerza exterior actúa sobre el fluido.

ii) $\gamma := \frac{\|f\|_{L^\infty}}{F}$ es un parámetro positivo que mide la proporción entre la altura de la fuerza exterior, $\|f\|_{L^\infty}$, y la fuerza promedio $F = \dfrac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$. Puesto que $supp\, \widehat{f} \subset \mathcal{C}(0, k_1, k_0)$ por las desigualdades de Bernstein (Lección 2, Teorema 4) se tiene que $0 < \gamma \leq 1$ de modo que $L := \frac{\ell_0}{\gamma} \geq \ell_0$.

Observación 4 *Usando las desigualdades de Bernstein se muestra además que existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ independientes de f tales que*

$$c_1 L \leq L_c \leq c_2 L,$$

es decir, la nueva longitud característica L es del orden de la longitud L_c definida por Constantin.

A partir de la escala inicial ℓ_0 definimos las cantidades promedio del fluido: la velocidad característica

$$U = \left(\limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|u\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la tasa de disipación de energía

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3}.$$

Por otro lado, a partir de la longitud característica L definimos los números de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

y los números de Grashof[1]

$$Gr = \frac{FL^3}{\nu}.$$

Los números de Grashof son números sin dimensiones físicas utilizados en la mecánica de fluidos para caracterizar, de igual forma que los números de Reynolds, el estado turbulento de un fluido cuando $Gr >> 1$. $Gr = \frac{FL^3}{\nu}$ es una medida cuantitativa de los efectos de la fuerza exterior (representados en el numerador) sobre los efectos de las fuerzas de viscosidad del fluido (representados en el denominador). De esta forma se tiene intuitivamente que si $Gr >> 1$ entonces los efectos de la fuerza exterior, que introduce la energía cinética en el fluido, son dominantes frente a los efectos de la viscosidad por lo que, de acuerdo al modelo de cascada de energía, la energía cinética se transfiere desde las grandes escalas de longitud hasta las más pequeñas y el fluido entra en un estado turbulento.

[1] (1826-1893) Ingeniero mecánico alemán.

Observación 5 *La gran utilidad de los numero de Grashof es que nos proporcionan una caracterización a priori del estado turbulento de un fluido pues estos números están definidos a través de los datos del modelo determinista: la fuerza promedio F, la longitud característica L y la constante de viscosidad del fluido ν.*

Por el contrario vemos que los números de Reynolds se definen a través de la velocidad característica U, es decir, dependen del campo de velocidades $u(t,x)$ y por lo tanto es una caracterización a posteriori del estado turbulento del fluido.

De acuerdo a la teoría K41 los números de Reynolds y los números de Grashof están relacionados por

$$Re \approx \sqrt{Gr}.$$

(B) El número adimensional G_0.

La segunda idea consiste en introducir en el modelo determinista un tercer numero sin dimensiones físicas

$$G_0 := \frac{\|f\|_{L^\infty}\ell_0^3}{\nu}.$$

Observamos que G_0 tiene la misma estructura que el numero de Grashof Gr pero a diferencia de este G_0 está fijo. De manera más precisa se tiene la relación

$$Gr = \frac{G_0}{\gamma^4}$$

por lo que el estado turbulento del fluido caracterizado por $G_r >> 1$ corresponde al hecho que $\gamma << 1$.

$\Rightarrow$ Como G_0 es un número sin dimensiones físicas y además fijo la idea es mostrar una estimación de la tasa de disipación ε con respecto al cociente $\frac{U^3}{L}$ con constante que dependan únicamente de G_0!

Se obtiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 2 *(Chamorro, Jarrín, Lemarié-Rieusset, 2015) Sea $u(t,x)$ el campo de velocidades del fluido solución débil del sistema de Navier-Stokes modificado*

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = f - \alpha P_2 u, \quad \textit{sobre} \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3. \\ \nabla\cdot u = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

asociado a la fuerza exterior $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$ estacionaria, a divergencia nula y tal que supp$\widehat{f}\subset\mathcal{C}(0,k_1,k_0)$ y con parámetro de truncatura $\alpha = \nu k_0^2$.

Para U, ε, L y γ las cantidades físicas del fluido definidas a partir de $u(t,x)$ y f respectivamente si $Re > \frac{1}{\gamma}$ entonces existen constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 que dependen únicamente de G_0 tales que:

(i) $c_1(G_0)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} \leq c_2(G_0)\varepsilon$ *y*

(ii) $c_3(G_0)Re \leq \sqrt{Gr} \leq c_4(G_0)Re.$

Observación 6 *(1) El punto (i) de este resultado nos provee precisamente una estimación de la tasa de disipación de energía según la teoría K41: si $\gamma << 1$ entonces $Re >> 1$ y $\varepsilon \approx c(G_0)\frac{U^3}{L}$ en donde como se había señalado la constante $c(G_0)$ depende solamente de G_0.*

(2) En cuanto a la prueba de este resultado es interesante resaltar que el término de truncatura $-2\alpha\int_0^T \|P_2 u(t)\|_{L^2}^2 dt$ *en la desigualdad de energía de las ecuaciones de Navier-Stokes modificadas:*

$$\|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot u dx dt - 2\alpha \int_0^T \|P_2 u(t)\|_{L^2}^2 dt,$$

nos permite mostrar la minoración de la tasa de disipación

$$\frac{U^3}{L} \leq c_2(G_0)\varepsilon$$

la cual es un problema abierto en el estudio de la ley de disipación de energía en el marco de las ecuaciones de Navier-Stokes, tanto en el caso periódico como en el caso no periódico.

Hasta este punto hemos visto la gran utilidad del término de truncatura $-\alpha P_2 u$:

- $\Rightarrow$ podemos controlar la cantidad de energía cinética $\|u(t)\|_{L^2}^2$ cuando $t \longrightarrow +\infty$ de suerte la velocidad característica U es una cantidad finita y
- $\Rightarrow$ con la ayuda de G_0 se muestra una estimación completa de ε con respecto a $\frac{U^3}{L}$, es decir, una minoración y una mayoración.

Sin embargo, este mismo término de truncatura nos permite mostrar la siguiente estimación de la frecuencia de Taylor $k_T := \frac{1}{\ell_T} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu U^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ con respecto a la frecuencia inicial k_0:

$$c_5(G_0)k_0 \leq k_T \leq c_6(G_0)k_0 \tag{6}$$

en donde c_5, c_6 son constantes positivas que dependen únicamente de G_0. Recordemos brevemente que en la teoría K41 el estado turbulento de un fluido está caracterizado por los números de Reynolds $Re >> 1$ y por una frecuencia de Taylor k_T suficientemente grande respecto a la frecuencia inicial k_0, de manera más precisa se tiene que $k_T \approx \sqrt{Re} k_0$ en donde según el modelo de cascada de energía cuando la energía cinética es introducida en la frecuencia k_0 si $Re >> 1$ entonces $k_D >> K_T >> k_0$ (donde $k_D = \frac{1}{\ell_D}$ es la frecuencia de disipación) por lo que existe un intervalo suficientemente grande de escalas intermedias donde la energía cinética puede ser transferida y el fluido entra en estado turbulento.

- $\Rightarrow$ Se tiene entonces que el término de truncatura $-\alpha P_2 u$ es demasiado fuerte y no permite que el fluido esté en un estado turbulento!

En efecto, la estimación (6) (la cual se obtiene gracias a $-\alpha P_2 u$) nos dice que k_T es del orden de k_0 y en este caso el intervalo de escalas intermedias no es lo suficientemente para grande para que la energía cinética pueda ser transferida antes de ser disipada por los efectos de la viscosidad.

4. Conclusiones

(1) El estudio de la teoría K41 en el marco de las ecuaciones de Navier-Stokes es intrigante pues hasta el momento las leyes simples y universales de esta teoría no han podido ser obtenidas completamente a partir de estas ecuaciones. Existe una considerable cantidad de artículos de investigación en donde se proponen modelos matemáticos de todo tipo:

a) deterministas con condiciones de borde, periódicas y en todo el espacio $\mathbb{R}^3$,

b) estocásticos en donde se añade una componente estocástica a las ecuaciones de Navier-Stokes,

c) diádicos que corresponden a las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas las cuales son tratadas desde el punto de vista analítico y numérico, etc, sin embargo los resultados obtenidos son parciales o están sujetos a fuertes hipótesis hechas sobre el campo del velocidades del fluido.

Gran parte de esta dificultad radica en el hecho que conocemos muy poco sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, es decir, actualmente no comprendemos lo suficiente las ecuaciones de base para el estudio riguroso de la turbulencia.

(2) El nuevo modelo determinista para el estudio de la ley de disipación de energía, el cual está dado por:

(i) las ecuaciones de Navier-Stokes modificadas $\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f - \alpha P_2 u$,

(ii) la longitud inicial $\ell_0 = \frac{1}{k_0}$ y la longitud característica $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ (asociadas a la fuerza exterior f) y

(iii) el numero adimensional fijo G_0

nos proporciona un interesante ejemplo de un fluido (evidentemente artificial pues hemos modificado las ecuaciones de Navier-Stokes clásicas) el cual no es turbulento y sin embargo la tasa de disipación de energía ε verifica la relación $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$ según la teoría K41.