Lección n°3: Soluciones débiles de Leray de las ecuaciones de Navier-Stokes USFQ, noviembre 2015

Índice

1. Noción de soluciones débiles

Vamos a ahora cambiar de punto de vista. Primero nuestros espacios de base serán los espacios de Lebesgue, pero sobre todo, las derivadas no serán consideradas en el sentido clásico (o fuerte) sino en el sentido débil.

Definición 1 *Sea α un multi-índice y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable (no necesariamente regular). Si existe una función g tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

diremos entonces que la función f admite una derivada débil de orden α.

En el caso de una función suficientemente regular, una integración por partes muestra que se tiene esta relación en el sentido usual.

Volviendo a las ecuaciones de Navier-Stokes, diremos que una solución débil de este problema verifica

$$\int_{\mathbb{R}^3} \big(\partial_t \vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p - \vec{f}\big)\vec{\phi}dx = 0,$$

para todo campo de vectores $\vec{\phi}$ que pertenece al espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$.

Este cambio de perspectiva nos permite buscar soluciones en conjuntos mucho más grandes, dicho de otra manera, el hecho de considerar derivadas débiles nos permite ampliar nuestro panorama: por un lado podremos considerar espacios funcionales mucho más grandes y por otro lado podremos aplicar una serie de herramientas muy poderosas que han sido desarrolladas durante el siglo XX.

Pero antes de lanzarnos en cálculos es necesario precisar sobre qué tipo de espacios funcionales vamos a trabajar. En el caso de las soluciones débiles que vamos a tratar aquí, nos vamos a focalizar principalmente en los espacios de Sobolev. Indiquemos que esta forma de proceder tiene su origen en los trabajos de Jean Leray en 1934 quien introdujo de forma prácticamente de manera simultánea la noción de derivada débil junto con Sergei Sobolev[1].

[1]Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989), matemático ruso.

2. Espacios de Sobolev

Definición 2 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ y cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones verifican $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \leq k$. Este espacio de funciones puede ser normado por la cantidad*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

Nótese que si $k = 0$ entonces $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tienen las inclusiones*

$$W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

Un espacio de Sobolev que vamos a usar de manera sistemática es el espacio $W^{1,2}$ también notado por H^1 y que puede ser caracterizado como las funciones de cuadrado integrable tales que la cantidad siguiente es finita:

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}.$$

A veces, es útil utilizar la transformada de Fourier para definir estos espacios. Recordemos que la transformada de Fourier está definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,$$

entonces podemos definir los espacios de Sobolev de la siguiente manera:

Definición 3 *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{s,p}$ por medio de la norma:*

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p}$$

En particular, dado que sobre L^2 tenemos la fórmula de Plancherel $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$, podemos escribir para todo $s \in \mathbb{R}$:

$$\|f\|_{H^s} = \left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2}.$$

Esta caracterización es muy útil pues nos permite leer directamente las propiedades de los espacios de Sobolev.

En particular tenemos para $0 < s_0 < s_1$ las inclusiones

$$\|f\|_{H^{-s_1}} \leq \|f\|_{H^{-s_0}} \leq \|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^{s_0}} \leq \|f\|_{H^{s_1}}$$

Utilizaremos las siguientes notaciones y propiedades

- El espacio de Sobolev $\dot{H}^1$ homogéneo está dado por la (semi)-norma

$$\|f\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla f\|_{L^2}.$$

- El espacio de Sobolev H^{-1} de regularidad negativa está determinado por

$$\|f\|_{H^{-1}} = \|f\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{-1/2}f\|_{L^2},$$

  en donde el operador $(-\Delta)^{-1/2}$ puede definirse por medio de la transformada de Fourier, en efecto se tiene $\widehat{(-\Delta)^{-1/2}f} = c|\xi|^{-1}\widehat{f}$.

- De igual manera el espacio de Sobolev $\dot{H}^{-1}$ está dado por

$$\|f\|_{\dot{H}^{-1}} = \|(-\Delta)^{-1/2}f\|_{L^2},$$

- En particular se tienen las mayoraciones siguientes en donde intervienen los corchetes de dualidad

$$\langle f, g\rangle_{H^1,H^{-1}} = \int_{\mathbb{R}^n} fg dx \leq \|f\|_{H^1}\|g\|_{H^{-1}}$$

Históricamente, los espacios de Sobolev basados en una norma L^2 fueron los primeros en ser utilizados, en particular por el hecho que estos espacios poseen una estructura de espacio de Hilbert, lo que hace su uso particularmente interesante.

Veremos posteriormente otras propiedades de estos espacios de funciones. En particular tenemos el siguiente resultado que relaciona propiedades del proyector de Leray con propiedades de los espacios de Sobolev.

Proposición 2 *El proyector de Leray puede definirse por medio de la expresión*

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = \vec{f} - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}),$$

de manera que es un operador acotado en los espacios de Sobolev: para todo $s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{H^s} \leq C\|\vec{f}\|_{H^s}$$

3. Problema Integral

El punto de partida está dado por la forma integro-diferencial utilizada por Oseen. Pero vamos a razonar de manera ligeramente distinta. Partimos pues del problema:

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad \text{sobre} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^3, \\ \\ div(\vec{u}) = 0,\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0,\ div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Utilizando la descomposición de Helmholtz, aplicando el proyector de Leray a cada uno de los miembros de esta ecuación y usando el hecho que $div(\vec{u}) = 0$ obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \mathbb{P}\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right), \quad \text{sobre} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^3, \\ \\ div(\vec{u}) = 0,\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0,\ div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

La gran diferencia entre (1) y (2) proviene del hecho que la presión ha *desaparecido* y esto gracias al proyector de Leray. Esta transformación nos permite ver al problema (2) como una ecuación del calor perturbada y podemos entonces reformular este problema por medio de una ecuación integro-diferencial siguiente:

$$\vec{u}(t,x) = h_{\nu t} * \vec{u}_0 - \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right) ds. \tag{3}$$

La similitud de esta expresión con la expresión encontrada por Oseen es muy fuerte, en realidad la única diferencia radica en la escritura explícita del proyector de Leray en la fórmula anterior. Una vez que tenemos la expresión (3), vamos a aplicar un algoritmo de punto fijo para encontrar una solución.

Indiquemos que existen muchos teoremas de punto fijo, pero en este caso estamos interesados en el teorema de punto fijo de Picard que se base en propiedades métricas de los espacios en consideración.

Punto fijo

Más precisamente, vamos a aplicar el principio de contracción de Picard[2] que dice lo siguiente:

[2]E. Picard (), matemático francés.

Teorema 1 (Principio de contracción de Picard) *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espacio de Banach, y sea* $T : E \times E \longrightarrow E$ *una aplicación bilineal acotada, es decir tal que*

$$\|T(e,f)\|_E \leq C_T \|e\|_E \|f\|_E.$$

Entonces, si $0 < \delta < \frac{1}{4C_T} < 1$ *y si* $e_0 \in E$ *es tal que* $\|e_0\|_E \leq \delta$*, la ecuación*

$$e = e_0 - T(e,e),$$

admite una solución que verifica $\|e\|_E \leq 2\delta$.

Esta solución es única sobre la bola cerrada $\bar{B}(0, 2\delta)$ *y además se tiene una dependencia continua con respecto al dato inicial: si* f_0 *es otro dato inicial tal que* $\|f_0\|_E \leq 2\delta$*, y si* f *es solución de la ecuación* $f = f_0 - T(f,f)$ *con* $\|f\|_E \leq 2\delta$*, entonces* $\|e - f\|_E \leq \frac{1}{1-4C_T\delta}\|e_0 - f_0\|_E$.

Demostración: Vamos a construir la solución e por iteración. Puesto que tenemos un dato inicial podemos escribir

$$e_{n+1} = e_0 - T(e_n, e_n),$$

y vamos a ver que al límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene una solución del problema buscado. Por inducción empezamos comprobando que $\|e_n\|_E \leq 2\delta$. Esto se tiene para e_0, de manera que lo suponemos para e_n y lo comprobamos para e_{n+1}:

$$\|e_{n+1}\|_E \leq \|e_0\|_E + \|T(e_n, e_n)\|_E \leq \|e_0\|_E + C_T\|e_n\|_E^2 \leq \delta + 4C_T\delta^2 \leq 2\delta.$$

Esto muestra que para todo $n \geq 1$, se tiene que el objeto e_n que hemos construido no se "escapa" de la bola cerrada $\bar{B}(0, 2\delta)$. Ahora debemos verificar que estamos tendiendo hacia un objeto e cuando $n \to +\infty$. Para ello calculamos la diferencia siguiente:

$$\begin{aligned}
\|e_{n+1} - e_n\|_E &= \|(e_0 - T(e_n, e_n)) - (e_0 - T(e_{n-1}, e_{n-1}))\|_E = \|-T(e_n, e_n) + T(e_{n-1}, e_{n-1})\|_E \\
&= \|T(e_n - e_{n-1}, e_n) + T(e_{n-1}, e_n - e_{n-1})\|_E \leq \|T(e_n - e_{n-1}, e_n)\|_E + \|T(e_{n-1}, e_n - e_{n-1})\|_E \\
&\leq C_T\|e_n - e_{n-1}\|_E\|e_n\| + C_T\|e_{n-1}\|_E\|e_n - e_{n-1}\|_E \\
&\leq 4C_T\delta\|e_n - e_{n-1}\|_E,
\end{aligned}$$

a partir de esta estimación se obtiene el resultado:

$$\|e_{n+1} - e_n\|_E \leq (4C_T\delta)^n \|e_0 - e_1\|_E,$$

pero dado que se tiene $4C_T\delta < 1$, se obtiene que la cantidad a la derecha de la expresión anterior tiende a cero, de donde se deduce que e_n tiende hacia el elemento $e \in E$ que verifica $\|e\|_E \leq 2\delta$.

La unicidad es inmediata por construcción. Para la dependencia con respecto a los datos iniciales escribimos:

$$\begin{aligned}
\|e - f\|_E &= \|(e_0 - T(e,e)) - (f_0 - T(f,f))\|_E = \|e_0 - f_0 - T(e - f, e) - T(f, e - f)\|_E \\
&\leq \|e_0 - f_0\|_E + \|T(e - f, e)\|_E + \|T(f, e - f)\|_E \\
&\leq \|e_0 - f_0\|_E + C_T\|e\|_E\|e - f\|_E + C_T\|f\|_E\|e - f\|_E \leq \|e_0 - f_0\|_E + 4C_T\delta\|e - f\|_E \\
\|e - f\|_E &\leq \frac{1}{1 - 4C_T\delta}\|e_0 - f_0\|_E.
\end{aligned}$$

Esta dependencia continua de las soluciones con respecto a los datos iniciales nos indica que si e_0 y f_0 son dos datos iniciales muy cercanos, entonces sus respectivas soluciones también serán muy cercanas. ■

Como vemos, el principio de contracción de Picard nos permite obtener soluciones de ecuaciones de la forma

$$e = e_0 - T(e,e).$$

Si comparamos esta ecuación con la ecuación (3), vemos que su estructura es muy similar y evidentemente deseamos aplicar este resultado identificando $e_0 = h_{\nu t} * \vec{u}_0$ y

$$T(e,e) = \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right) ds.$$

Hay sin embargo algunos problemas:

- es necesario fijar el marco funcional, es decir hay que fijar un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$,
- es necesario verificar que la forma bilineal $T(e,e)$ es acotada en este espacio de Banach.

Este punto es muy delicado en realidad: si se desea trabajar con datos iniciales $\vec{u}_0$ de *energía finita* (modelizado por el hecho que $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$), aparecen cierto tipo de problemas.

En efecto, el espacio L^2 no es un buen espacio funcional para realizar el punto fijo, pues se tienen los puntos siguientes:

- si $\vec{u}_0 \in L^2$, entonces se tiene $h_{\nu t} * \vec{u}_0 \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$,
- si $\vec{g} \in L^2_t H^{-1}_x$, entonces se tiene que $\displaystyle\int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right) ds \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$
- el gran problema proviene del hecho que si se tiene $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$ con $div(\vec{u}) = 0$, no se tiene que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^{-1}_x$, sino solo se tiene $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^{-3/2}_x$, lo cual no es suficiente para cerrar el punto fijo.

$\Rightarrow$ Quisiéramos realizar un punto fijo en el espacio $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$, pero el término no-lineal no permite proceder de esta forma en este espacio.

Una aproximación

La respuesta a este problema encontrada por Leray consiste en realizar una pequeña modificación de la ecuación original. Como hemos visto, la dificultad radica en el término no lineal $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ y vamos a reemplazarlo por un término más regular. Para ello consideramos una función $\omega \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ tal que $\omega \geq 0$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \omega dx = 1$, y para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\omega(x/\varepsilon).$$

Entonces el término no lineal $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ será reemplazado por la cantidad $(\omega_\varepsilon * \vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ de modo que vamos a estudiar el problema:

$$\vec{u}(t,x) = h_{\nu t} * \vec{u}_0 - \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\left((\omega_\varepsilon * \vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right) ds. \tag{4}$$

Evidentemente el problema anterior depende del valor de $\varepsilon > 0$ y notaremos las soluciones a este problema por $\vec{u}_\varepsilon$, pero veremos después cómo deshacernos de esta dependencia. Por el momento, vamos a realizar un algoritmo de punto fijo sobre el problema (4) donde $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y donde $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

$\Rightarrow$ Partimos de la desigualdad

$$\|\vec{u} * \omega_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon^{-3/2}\|\vec{u}\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2}.$$

$\Rightarrow$ Luego, para $\vec{u}$, $\vec{v} \in L^2_t H^1_x$ con $div(\vec{u}) = 0$, tenemos para todo $0 < T_0 < T$ la mayoración:

$$\|(\vec{u} * \omega_\varepsilon)\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\|_{L^2_t H^{-1}_x} \leq C\sqrt{T_0}\varepsilon^{-3/2}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x}\|\vec{v}\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

$\Rightarrow$ Si definimos la norma $\|\vec{u}\|_{(\nu,T_0)} = \|\vec{u}\|_{L^\infty(]0,T_0[,L^2)} + \sqrt{\nu}\|\vec{u}\|_{L^2(]0,T_0[,\dot{H}^1)}$, tenemos

$$\left\| h_{\nu t} * \vec{u}_0 - \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds \right\|_{(\nu,T_0)} \leq C \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}(1+T_0\nu)\|\vec{f}\|_{L^2_t H^{-1}_x} \right),$$

y además tenemos:

$$\left\| \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\left((\omega_\varepsilon * \vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) ds \right\|_{(\nu,T_0)} \leq C \frac{1}{\sqrt{\nu}}(1+T_0\nu)\sqrt{T_0}\varepsilon^{-3/2}\|\vec{u}\|_{L^\infty L^2}\|\vec{v}\|_{L^\infty L^2}.$$

$\Rightarrow$ Estas estimaciones nos permiten decir que es posible realizar un algoritmo de punto fijo de la ecuación

$$\vec{u}(t,x) = h_{\nu t} * \vec{u}_0 - \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}\left((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f} \right) ds,$$

en el espacio de Banach $L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$ dotado de la norma $\|\vec{u}\|_{(\nu,T_0)} = \|\vec{u}\|_{L^\infty(]0,T_0[,L^2)} + \sqrt{\nu}\|\vec{u}\|_{L^2(]0,T_0[,\dot{H}^1)}$, siempre y cuando el tiempo T_0 sea lo suficientemente pequeño para asegurar las condiciones

$$1 + T_0\nu \leq 2, \qquad T_0 \leq \varepsilon^3 \nu \frac{1}{16C^4(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \frac{2}{\sqrt{\nu}}\|\vec{f}\|_{L^2H^{-1}})^2}.$$

Obtenemos por este procedimiento una solución $\vec{u}_\varepsilon$ únicamente en un intervalo de tiempo muy pequeño, y vamos a ver ahora cómo prolongar el tiempo de existencia de esta solución, de manera a obtener soluciones globales.

Desigualdades de Energía

Para obtener soluciones globales es suficiente mostrar que la norma L^2 de las soluciones $\vec{u}_\varepsilon$ son siempre acotadas en el tiempo. Este será posible por una desigualdad *a priori*, es decir a partir de una información dada por la estructura de la ecuación. Escribimos

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon = \nu\Delta\vec{u}_\varepsilon - (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon - \vec{\nabla}p + \vec{f},$$

multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\vec{u}_\varepsilon$ para obtener

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon = \nu\Delta\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon - (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon - \vec{\nabla}p \cdot \vec{u}_\varepsilon + \vec{f} \cdot \vec{u}_\varepsilon,$$

e integrando sobre todo el espacio podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}p \cdot \vec{u}_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{u}_\varepsilon dx,$$

pero dado que $\vec{u}_\varepsilon$ es de divergencia nula y se tiene $div(\vec{u}_\varepsilon * \omega_\varepsilon) = \omega_\varepsilon * div(\vec{u}_\varepsilon) = 0$, lo que en realidad tenemos es

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{u}_\varepsilon dx,$$

y por una integración por partes se tiene

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2} = 2\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx = -2\nu\|\vec{u}_\varepsilon\|_{\dot{H}^1} + 2\langle \vec{f}, \vec{u}_\varepsilon \rangle_{H^{-1},H^1},$$

en este punto aplicamos la desigualdad de Young $\langle \vec{f}, \vec{u}_\varepsilon \rangle_{H^{-1},H^1} \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} \leq \nu\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}}$ para obtener

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2} \leq -\nu\|\vec{u}_\varepsilon\|_{\dot{H}^1} + \nu\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2} + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}},$$

a partir de esta desigualdad diferencial, integrando en el tiempo se obtiene:

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2} ds + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{L^2\dot{H}^{-1}}.$$

Necesitaremos el resultado a continuación:

> **Lema 1 (Grönwall)** *Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y sea $c \in [a,b]$. Si existen dos constantes positivas A y B tales que*
>
> $$\phi(t) \leq A + B \left| \int_c^t \phi(s)ds \right|, \qquad \textit{para todo } t \in [a,b],$$
>
> *entonces se tiene la mayoración*
>
> $$\phi(t) \leq A e^{B|t-c|}, \qquad \textit{para todo } t \in [a,b].$$

Finalmente, basta aplicar la desigualdad de Grönwall para obtener

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds &\leq \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \|\vec{f}\|_{L^2\dot{H}^{-1}}^2 \right) e^{\nu t}. \\ \|\vec{u}\|_{(\nu,T)}^2 &\leq \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \|\vec{f}\|_{L^2\dot{H}^{-1}}^2 \right) e^{\nu t}. \end{aligned}$$

Esto muestra que la norma L^2 y la norma $\dot{H}^1$ de la solución $\vec{u}_\varepsilon$ es controlada en el tiempo a partir del dato inicial $\vec{u}_0$ y de la presión $\vec{f}$ de manera *uniforme* con respecto al parámetro de regularización $\varepsilon > 0$.

Este control uniforme permite muchas cosas:

- Repetir el argumento de punto fijo utilizando como punto de partida, ya no el dato inicial $\vec{u}_0$, sino la solución encontrada en tiempo pequeño. De esta manera, por iteración se logra obtener una solución que "vive" en un intervalo $[0,T]$ para un cierto $T > 0$.
- Al tener un control *uniforme* en ε, es posible intentar pasar al límite cuando $\varepsilon \to 0$ para deshacerse de la regularización inicialmente planteada.

El paso al límite es un poco más delicado y será tratado en la sección que sigue.

Paso al límite y recuperación de la solución débil

Para poder pasar al límite cuando $\varepsilon \to 0$ necesitaremos el teorema siguiente:

> **Teorema 2 (Rellich-Lions)** *Sea I un intervalo de la recta real y sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles definidas sobre $I \times \Omega$ tales que, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$ se tiene*
>
> *1) para algún $\alpha > 0$:*
>
> $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi u_n\|_{L^2(I,H^\alpha)} < +\infty,$$
>
> *2) para algún $\beta < 0$ y para algún $1 < p \leq 2$,*
>
> $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi \partial_t u_n\|_{L^p(I,H^\beta)} < +\infty,$$
>
> *entonces, existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fuertemente a un límite u en el espacio $(L_t^2 L_x^2)_{loc}$, es decir que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$ se tiene*
>
> $$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 |u_{n_k} - u|^2 dxdt = 0.$$

Como vemos, este teorema nos permite pasar al límite si cumplimos algunas condiciones que serán verificadas, pero lo más importante es que estamos *obligados* de considerar una subsucesión y esto nos hacer perder mucha información.

Por ejemplo, tomemos la sucesión $(-1)^n$, que no es convergente, pero si consideramos la subsucesión formada por los n pares, vemos que tiende hacia 1, mientras que si tomamos los n impares, obtenemos que la subsucesión correspondiente tiende hacia -1: hemos perdido la unicidad del límite.

Vamos ahora a aplicar este resultado. Sabemos por la desigualdad de energía que la norma de la función $\vec{u}_\varepsilon$ es acotada uniformemente en el espacio $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$. Además, dado que se tiene $\|\omega\|_{L^1} = 1$, tenemos $\|\vec{u}_\varepsilon * \omega_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2}$.

Volviendo a la ecuación verificada por $\vec{u}_\varepsilon$ tenemos

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon = \nu\Delta\vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}(div(\vec{u}_\varepsilon * \omega_\varepsilon) \otimes \vec{u}_\varepsilon - \vec{f}) \tag{5}$$

Si estudiamos cada uno de los términos de esta ecuación, podemos ver que la cantidad $\partial_t\vec{u}_\varepsilon$ es acotada en $L^2H^{-3/2}$ en cada subintervalo de tiempo de $[0, T]$. Tenemos entonces todas las hipótesis del teorema de Rellich-Lions, de manera que al aplicarlo obtenemos una subsucesión $\varepsilon_n \to 0$ y una función $\vec{u}$ tales que:

- en cada subintervalo de $[0, T]$ se tiene la convergencia débil-$*$ de $\vec{u}_{\varepsilon_n}$ hacia $\vec{u}$ en $L^\infty L^2$ y $L^\infty \dot{H}^1$.
- se tiene la convergencia fuerte de $\vec{u}_{\varepsilon_n}$ hacia $\vec{u}$ en $(L^2L^2)_{loc}$.

$\Rightarrow$ dado que $\vec{u}_\varepsilon$ es acotado en $L^\infty L^2$, se tiene que $\vec{u}_{\varepsilon_n} * \omega_{\varepsilon_n}$ converge fuertemente hacia $\vec{u}$ en $(L^2L^2)_{loc}$.

$\Rightarrow$ dado que $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_{\varepsilon_n}$ es débilmente-$*$ convergente hacia $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}$ en L^2_{loc} se tiene que $(\vec{u}_{\varepsilon_n} * \omega_{\varepsilon_n})\cdot\vec{\nabla}\vec{u}_{\varepsilon_n}$ es débilmente-$*$ convergente hacia $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{u}$ en $L^2H^{-3/2}$.

$\Rightarrow$ finalmente, el proyector de Leray $\mathbb{P}$ es acotado en el espacio $H^{-3/2}$ de manera que se tiene la convergencia débil-$*$ de $\mathbb{P}((\vec{u}_{\varepsilon_n} * \omega_{\varepsilon_n})\cdot\vec{\nabla}\vec{u}_{\varepsilon_n})$ hacia $\mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})$.

Con todas estas consideraciones, podemos pasar al límite $\varepsilon_n \to 0$ en la ecuación (5) para obtener una función $\vec{u}$ que verifica

$$\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \mathbb{P}(div(\vec{u}) \otimes \vec{u} - \vec{f}).$$

Con todos estos cálculos hemos demostrado el teorema:

Teorema 3 (Leray) *Sea $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con $div(\vec{u}_0) = 0$ y sea $\vec{f} \in L^\infty_t H^{-1}_x(]0, T[\times\mathbb{R}^3)$. Entonces:*

1) Para todo $\varepsilon > 0$, el problema aproximado asociado al regularizador ω_ε:

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \mathbb{P}\left(((\vec{u} * \omega_\varepsilon)\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right) \quad sobre \quad [0, T]\times\mathbb{R}^3, \\ \\ div(\vec{u}) = 0,\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0,\ div(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

admite una única solución $\vec{u}_\varepsilon \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$ en cada subintervalo de $[0, T]$.

2) Estas soluciones $\vec{u}_\varepsilon$ verifican la desigualdad de energía:

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds \leq \left(\|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{L^2H^{-1}}\right)e^{\nu t}.$$

3) Existe una subsucesión $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y una función $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$ tal que $\vec{u}_{\varepsilon_n}$ es débilmente convergente hacia $\vec{u}$ y se tiene que $\vec{u}$ es solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \mathbb{P}\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\right) \quad sobre \quad [0, T]\times\mathbb{R}^3, \\ \\ div(\vec{u}) = 0,\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0,\ div(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$