Lección n°2: Soluciones clásicas de las ecuaciones de Navier-Stokes

USFQ, noviembre 2015

Índice

1. Descomposición de Helmholtz

A partir de las ecuaciones del calor y de la ecuación de Poisson podemos obtener un resultado fundamental debido a H. Helmholtz[1] que permite *descomponer* los campos de vectores como la suma de dos partes: una parte a divergencia nula y la otra sin divergencia nula.

Teorema 1 (Descomposición de Helmholtz) *Sea $\vec{F}$ un campo de vectores de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que se tenga*

$$\sup_{|\alpha|\leq 2}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta}|\partial^{\alpha}\vec{F}(x)|<+\infty,$$

con $2<\beta<3$. Entonces existen campos de vectores de clase $\mathcal{C}^1$, $\vec{G}$ y $\vec{H}$ tales que se tenga la descomposición

$$\vec{F}=\vec{G}+\vec{H},$$

donde se tienen las propiedades siguientes:

1) $\vec{G}$ es de divergencia cero: $div(\vec{G})=0$, y se tiene que $\vec{H}$ es irrotacional: $\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=0$,

2) se tiene $\sup_{|\alpha|\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta-1}|\partial^{\alpha}\vec{G}(x)|<+\infty$, y se tiene $\sup_{|\alpha|\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta-1}|\partial^{\alpha}\vec{H}(x)|<+\infty$.

Además, existe una única función p de clase $\mathcal{C}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta-2}|p(x)|<+\infty$, y tal que se tenga la identidad $\vec{H}=\vec{\nabla}p$.

Demostración. Empecemos con la existencia de una tal descomposición. Consideremos la divergencia del campo de vectores $\vec{F}$: $div(\vec{F})=\partial_{x_1}F_1+\partial_{x_2}F_2+\partial_{x_3}F_3$, de manera que por hypótesis sobre $\vec{F}$ tenemos

$$\sup_{|\alpha|\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta}|\partial^{\alpha}div(\vec{F})(x)|<+\infty.$$

Consideramos ahora la ecuación de Poisson siguiente en donde la incógnita es una función p:

$$\Delta p=div(\vec{F}), \tag{1}$$

entonces, por la lección anterior obtenemos la existencia de una función p que es solución de la ecuación de Poisson y que verifica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta-2}|p(x)|<+\infty, \qquad \text{y} \qquad \sup_{|\alpha|\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{\beta-1}|\partial^{\alpha}p(x)|<+\infty. \tag{2}$$

[1]Hermann von Helmholtz (1821-1894), físico alemán.

De esta manera, si definimos $\vec{H} = \vec{\nabla} p$ obtenemos que $\vec{G} = \vec{F} - \vec{\nabla} p$ y se verifica:

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p = 0$ pues el rotacional de un gradiente siempre es nulo.
- $div(\vec{G}) = div(\vec{F} - \vec{\nabla} p) = div(\vec{F}) - \Delta p = 0$, pues por construcción la función p es solución de la ecuación de Poisson (1).

De esta manera hemos obtenido dos campos de vectores $\vec{G}$ y $\vec{H}$ que cumplen el primer punto del teorema. Las acotaciones sobre los campos de vectores $\vec{G}$ y $\vec{H}$ se deducen fácilmente a partir de (2). Pasemos ahora al estudio de la unicidad y consideremos dos descomposiciones distintas $(\vec{G}_1, \vec{H}_1)$ y $(\vec{G}_2, \vec{H}_2)$ de $\vec{F}$. Tenemos entonces por construcción que $\vec{H}_2 - \vec{H}_1$ es un campo de vectores irrotacional que es de clase $\mathcal{C}^1$ y podemos entonces encontrar una función q de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{\nabla} q$. Escribimos, usando el hecho que $\vec{F} = \vec{G}_1 + \vec{H}_1$ y $\vec{F} = \vec{G}_2 + \vec{H}_2$:

$$\Delta q = div(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = div(\vec{G}_1 - \vec{G}_2) = 0,$$

pues los campos de vectores $\vec{G}_i$ son a divergencia nula. Esto muestra que la función q es armónica sobre todo el espacio y sus derivadas también son armónicas, además por el comportamiento al infinito del campo de vectores inicial $\vec{F}$ se tiene que las derivadas de la función q son funciones armónicas que tienden a cero al infinito, de donde se deduce por el principio del máximo que la función q es constante. Con esto se obtiene la unicidad buscada. ■

Esta descomposición de los campos de vectores es una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes y veremos cómo utilizarla al estudiar las soluciones débiles de Leray[2].

Definición 1 *Consideramos un campo de vectores $\vec{F}$ regular y su descomposición de Helmholtz $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$, en donde $\vec{G}$ es a divergencia nula y $\vec{H}$ es irrotacional. Definimos entonces el proyector de Leray $\mathbb{P}$ de $\vec{F}$ por medio de la expresión:*

$$\mathbb{P}(\vec{F}) = \vec{G}.$$

También puede usarse la definición

$$\mathbb{P}(\vec{F}) = \vec{F} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}).$$

2. El problema de Stokes y el Tensor de Oseen

Teorema 2 *Sean $\vec{u}_0$ un campo de vectores de clase $\mathcal{C}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$ y $\vec{f}$ un campo de vectores tales que se tenga:*

1) $\sup\limits_{|\alpha| \leq 2} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^3} |\partial^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty,$

2) para $|\alpha| \leq 2$, la función $\partial_x^\alpha \vec{f}$ es continua en $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$.

Entonces existe una única solución $(\vec{u}, p)$ del problema de Stokes:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \end{cases} \tag{3}$$

tal que

- *para $|\alpha| \leq 2$ la función $\partial_x^2 p$ es continua en $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,*
- *se tiene $\sup\limits_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta - 2} |p(t, x)| < +\infty$, y se tiene $\sup\limits_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \sup\limits_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta - 1} |\partial_x^\alpha p(t, x)| < +\infty$,*
- *para $|\alpha| \leq 2$, la función $\partial_x^\alpha \vec{u}$ es continua en $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ y es acotada en cada banda $]0, T[\times \mathbb{R}^3$,*
- *la función $\partial_t \vec{u}$ es continua en $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$.*

[2] J. Leray (1906-1998), matemático francés.

Demostración. Vamos a utilizar la descomposición de Helmholtz de $\vec{f} = \vec{G} + \vec{\nabla} q$ para obtener

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{G} + \vec{\nabla} q \iff \partial_t \vec{u} = [\nu \Delta \vec{u} + \vec{G}] + [\vec{\nabla}(q-p)],$$

dado que $\vec{u}$ es de divergencia cero, se tiene que el término $[\nu\Delta\vec{u}+\vec{G}]$ es también de divergencia nula; de igual manera se tiene que la cantidad $[\vec{\nabla}(q-p)]$ es irrotacional. De esta manera, aplicando la descomposición de Helmholtz al campo de vectores $\partial_t \vec{u}$ se obtienen las ecuaciones:

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta u + \vec{G} \qquad \text{y} \qquad 0 = \vec{\nabla}(q-p).$$

En este punto recordamos que $\vec{G} = \mathbb{P}(\vec{f})$ y que $\vec{H} = \vec{\nabla} q$, de donde se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta u + \mathbb{P}(\vec{f}) \qquad \text{y} \qquad \Delta p = div(\vec{f}),$$

la primera es la ecuación del calor no homogénea con dato inicial $\vec{u}_0$, mientras que la segunda es la ecuación de Poisson. Entonces, por los resultados dados anteriormente relativos a la ecuación de calor y la ecuación de Poisson, obtenemos la existencia y la unicidad de una solución $(\vec{u}, p)$ del problema de Stokes (3).

Obtenemos las siguientes expresiones para las funciones $\vec{u}$ y p:

$$p(t,x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * div(\vec{f}(t,x)) = -\Phi * div(\vec{f}(t,x)) \tag{4}$$

$$\vec{u}(t,x) = h_{\nu t} * \vec{u}_0 + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * (\vec{f}(s,x) - \vec{\nabla} p(s,x)) ds. \tag{5}$$

■

El tensor de Oseen

El tensor de Oseen[3] permite dar informaciones muy importantes sobre el comportamiento de las eventuales soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. En realidad, el tensor de Oseen, proviene de una reescritura de la solución $(\vec{u}, p)$ del problema de Stokes dado en (4)-(5). En efecto, reemplazando (4) en (5) se tiene que cada componente $(u_k)_{1\leq k\leq 3}$ del vector $\vec{u}$ se escribe como

$$u_k = h_{\nu t} * u_{0,k} + \int_0^t \sum_{j=1}^3 f_j * \left(\delta_{j,k} h_{\nu(t-s)} + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} h_{\nu(t-s)} \right) ds. \tag{6}$$

El operador de convolución dentro de la integral es entonces el tensor de Oseen.

Definición 2 *Definimos el tensor de Oseen como el tensor $(\mathcal{O}_{j,k}(\nu t, x))_{1\leq j,k\leq 3}$ de componentes:*

$$\mathcal{O}_{j,k}(\nu t, x) = \delta_{j,k} h_{\nu(t-s)} + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} h_{\nu(t-s)}.$$

De esta manera, podemos reescribir la solución del problema de Stokes de la siguiente manera:

$$\boxed{u_k = h_{\nu t} * u_{0,k} + \int_0^t \sum_{j=1}^3 f_j * \mathcal{O}_{j,k}(\nu(t-s), x) ds, \qquad (1 \leq k \leq 3). \qquad (7)}$$

Una particularidad importante del tensor de Oseen es su *homogeneidad*: si escribimos $\mathcal{O}_{j,k}(x) = \mathcal{O}_{j,k}(1,x)$, entonces tenemos la identidad

$$\mathcal{O}_{j,k}(\nu t, x) = \frac{1}{(\nu t)^{3/2}} \mathcal{O}_{j,k}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}} \right).$$

[3] Carl Oseen (1879-1944), físico sueco.

Esta propiedad de homogeneidad es *fundamental* pues dicta el comportamiento de las soluciones, en particular esta característica determina los espacios funcionales sobre los cuales se puede razonablemente trabajar.

Como vemos en la fórmula de u_k descrita en (6), las propiedades de la solución van a depender directamente de las propiedades del dato inicial $\vec{u}_0$, de la fuerza exterior $\vec{f}$ y del tensor de Oseen. En particular necesitaremos las siguientes estimaciones:

Teorema 3 *El tensor de Oseen se puede escribir por medio de la expresión*

$$\mathcal{O}_{j,k}(x) = \delta_{j,k}h(x) + 2\partial_{x_j}\partial_{x_k}\left(\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4}}ds\right)$$

Corolario 1 *Se tienen las siguientes estimaciones:*

1) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^3$: $|\partial^\alpha \mathcal{O}_{j,k}(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{-3-|\alpha|}$,

2) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^3$ *y para todo* $|x| > 1$: $|\partial^\alpha(\mathcal{O}_{j,k}(x) - \partial_{x_j}\partial_{x_k}\Phi(x))| \leq C_\alpha e^{-\frac{|x|^2}{8}}$.

3. Las soluciones clásicas de las ecuaciones de Navier-Stokes

Vamos ahora a ver cómo el problema de Stokes, junto con las estimaciones del tensor de Oseen, nos van a permitir resolver de manera clásica las ecuaciones de Navier-Stokes. Recordemos que el problema de Stokes es

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

si consideramos ahora un nueva fuerza $\vec{g} = \vec{f} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$, lo que obtendríamos son las ecuaciones de Navier-Stokes. Intuitivamente podríamos escribir, utilizando las fórmulas (7) para la velocidad $\vec{u}$ y (4) para la presión, que las soluciones del problema de Navier-Stokes se escriben:

$$\begin{aligned} u_k &= h_{\nu t} * u_{0,k} + \int_0^t \sum_{j=1}^3 \left[\vec{f} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right]_j * \mathcal{O}_{j,k}(\nu(t-s),x)ds, \qquad (1 \leq k \leq 3). \\ p(t,x) &= -\sum_{j=1}^3 \left[\vec{f}_j - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_j\right] * \partial_{x_j}\Phi(x), \end{aligned}$$

evidentemente, es necesario justificar estas operaciones. Sin embargo, lo más interesante de este punto de vista es que se ha podido *transformar* el sistema de ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes en un sistema integro-diferencial.

En particular, si notamos

$$\vec{v}_0 = h_{\nu t} * \vec{u}_0 + \int_0^t \vec{f} * \mathcal{O}(\nu(t-s),x)ds,$$

tenemos la siguiente identidad

$$\vec{u} = \vec{v}_0 - \int_0^t (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} * \mathcal{O}(\nu(t-s),x)ds = \vec{v}_0 + B(\vec{u},\vec{u}), \tag{8}$$

en donde $B(\cdot,\cdot)$ es una aplicación *bilineal* y *continua* en un cierto espacio funcional $(E, \|\cdot\|_E)$, es decir

$$\|B(f,g)\|_E \leq C_0\|f\|_E\|g\|_E.$$

La idea de Oseen fue expresar a la solución $\vec{u}$ como una serie donde el parámetro $\varepsilon > 0$ puede verse como un radio de convergencia:

$$\vec{u}_\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{v}_n,$$

y a partir de esta descomposición es posible considerar el problema genérico

$$\vec{u}_\varepsilon = \vec{v}_0 + \varepsilon B(\vec{u}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon), \tag{9}$$

de manera que reemplazando la cantidad $\vec{u}_\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{v}_n$, en la ecuación anterior e identificando cada uno de los miembros según las potencias de ε, se obtiene que

$$\vec{v}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B(\vec{v}_k, \vec{v}_{n-k}).$$

Esta fórmula nos permite considerar una cascada de ecuaciones, lineales, cuya solución está dada por la solución del problema de Stokes estudiado anteriormente.

Podemos entonces estimar cada término $\vec{v}_n$ y gracias a este razonamiento, es posible fijar $\varepsilon = 1$, de manera que, regresando al problema original se obtiene la existencia de una solución $\vec{u}$ del problema $\vec{u} = \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})$.

Teorema 4 (Soluciones clásicas - tiempo pequeño) *Sean $\vec{u}_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos de vectores tales que*

1) $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)|\partial_x^\alpha \vec{u}_0(t,x)| < +\infty,$

2) para $|\alpha| \leq 2$, se tiene que $\partial_x^\alpha \vec{f}$ es continua en $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$,

3) $\displaystyle\sup_{0\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)^4|\partial^\alpha \vec{f}(t,x)| < +\infty.$

Entonces existe un tiempo $T > 0$ y una única solución $(\vec{u}, p)$ del problema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad \textit{sobre} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^3, \\ \\ div(\vec{u}) = 0, \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

tal que:

- *para $|\alpha| \leq 2$, se tiene que $\partial_x^\alpha p$ es continua en $[0,T]\times\mathbb{R}^3$,*
- $\displaystyle\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)|\partial_x^\alpha p(t,x)| < +\infty,$
- *para $|\alpha| \leq 2$, se tiene que $\partial_x^\alpha \vec{u}$ es continua en $[0,T]\times\mathbb{R}^3$,*
- $\displaystyle\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)|\partial_x^\alpha \vec{u}(t,x)| < +\infty,$
- *$\partial_t \vec{u}$ es continua en $[0,T]\times\mathbb{R}^3$*

Teorema 5 (Soluciones clásicas globales) *Sea $\varepsilon_0 > 0$ una constante. Sean $\vec{u}_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos de vectores tales*

1) $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)|\partial_x^\alpha \vec{u}_0(t,x)| < \varepsilon_0\nu,$

2) $\displaystyle\sup_{0\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)^4|\partial^\alpha \vec{f}(t,x)| < \varepsilon_0\nu^2.$

Entonces existe una única solución global $(\vec{u}, p)$ del problema de Navier-Stokes tal que:

$$\sup_{0\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)|\partial_x^\alpha p(t,x)| < +\infty \quad y \quad \sup_{0\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^3, |\alpha|\leq 2} (1+|x|)|\partial_x^\alpha \vec{u}(t,x)| < +\infty.$$

El *problema* de estos teoremas es **doble**.

- Existen soluciones clásicas en un tiempo muy pequeño $T > 0$,
- Si queremos buscar soluciones globales en tiempo, los datos iniciales $(\vec{u}_0, \vec{f})$ deben ser muy pequeños.

La ventaja es que, por un lado, podemos trabajar con funciones usuales y que todas las herramientas son totalmente clásicas, por lo más interesante es que se pueden deducir algunas propiedades que se mantendrán cuando pasemos al marco más abstracto de las soluciones débiles.

4. Propiedades de las soluciones clásicas

Teorema 6 (Comportamiento temporal) *Bajo las hipótesis del Teorema 5, si además se tiene*

$$\sup_{0\leq t}(1+\sqrt{\nu t}+|x|)^3|\vec{f}(t,x)| < +\infty,$$

entonces las soluciones dadas en el Teorema 5 poseen el siguiente comportamiento

$$\sup_{0\leq t}(1+\sqrt{\nu t}+|x|)|\vec{u}(t,x)| < +\infty.$$

Este resultado nos indica que, si la fuerza exterior se anula cuando el tiempo tiende al infinito, entonces la solución se anula al infinito.

Teorema 7 (Comportamiento espacial) *Sea $\vec{u}$ de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y sea $\vec{f}$ una fuerza exterior tales que*

$$\lim_{x\to+\infty}|x|^4|\vec{u}_0(x)| = 0,$$

$$\sup_{0\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|)^5|\vec{f}(t,x)| < +\infty,$$

entonces, la solución $\vec{u}$ de las ecuaciones de Navier-Stokes tiene el siguiente comportamiento espacial cuando x tiende al infinito:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\vec{\nabla}\partial_i\Phi(x) - \sum_{i,j=1}^{3} d_{i,j}(t)\vec{\nabla}\partial_i\partial_j\Phi(x) + o(|x|^{-4}),$$

en donde las funciones c_i y $d_{i,j}$ dependen de $\vec{u}$ y de $\vec{f}$.

El comportamiento espacial al infinito de las soluciones clásicas explicitado por este teorema es muy importante: si se parte de un dato inicial $\vec{u}_0$ cualquiera, instantáneamente se tiene un comportamiento al infinito del orden de $|x|^{-4}$ y no es posible obtener un decrecimiento mayor.

Este hecho tiene muchísimas consecuencias pues, a más de las propiedades de homogeneidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, es necesario tomar en cuenta esta propiedad si se desea buscar *otros* espacios funcionales sobre los cuales trabajar.