DIEGO CHAMORRO

DOSSIER ACADÉMIQUE

TABLE DES MATIÈRES

1) Fiche de synthèse

Diego Chamorro diego.chamorro@polytechnique.org
tel : 06 29 80 56 26 www.amarun.org/Diego Chamorro

Situation actuelle

Depuis octobre 2009	**Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche** (50%) Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise (ENSIIE) - 91025 Evry.
Qualification	**Qualifié en section 26 du CNU** Date de qualification : 05/02/2010. N° de qualification : 10226201216.

Recherche Actuelle

Depuis octobre 2009 — **Etude de l'équation Quasi-géostrophique critique**. En collaboration avec Pierre Gilles Lemarié-Rieusset à l'Université d'Evry.

Articles
- *Remarks on a fractional diffusion transport equation with applications to the critical dissipative quasi-geostrophic equation.* Diego Chamorro, soumis au Journal of Asymptotic Analysis le 22/12/2010.

- *Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes.* Diego Chamorro & Pierre Gilles Lemarié-Rieusset, soumis à la Revista Matemática Iberoamericana le 23/11/2010.

Mots-clés — E.D.P., équation Quasi-géostrophique, espaces de Hardy moléculaires, espace BMO, espaces de Besov.

Communications Nationales
- LATP, Université de Marseille, 04/2010
- Laboratoire d'Analyse et Probabilités, Université d'Evry, 06/2010
- 2ème école d'été franco-brésilienne, Université Lyon 1, 07/2010
- IRMAR, Université de Rennes, 11/2010
- Groupe de travail ENS/P6/P7 à l'Institut Henri Poincaré, 01/2011
- CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 02/2011

Communications Internationales
- XII encuentro de matemáticas de l'Escuela Politécnica Nacional (EPN), Quito, Equateur (2010).

Travaux de thèse

Sujet de thèse — **Inégalités de Gagliardo-Nirenberg précisées sur le groupe de Heisenberg**

Directeur de thèse — Yves Meyer (Professeur Emérite, ENS Cachan)

Soutenance et jury — Thèse soutenue le 6 janvier 2006, devant un jury composé de :
Président : Jean-Michel Morel (PdU, ENS Cachan)
Rapporteurs : Aline Bonami (PdU, Université d'Orléans)
Pierre Gilles Lemarié-Rieusset (PdU, Université d'Evry)

Mots-clés — Inégalités de Gagliardo-Nirenberg, inégalités de Sobolev précisées, groupes de Lie stratifiés, fonctions maximales, poids de Muckenhoupt.

Articles
- *Improved Sobolev Inequalities and Muckenhoupt weights on stratified Lie groups*, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011) 695–709.
- *Some functional inequalities on polynomial volume growth Lie groups*, accepté au Canadian Journal of Mathematics.
- *A counterexample for Improved Sobolev Inequalities over the 2-adic group*, soumis au Communications of the Korean Mathematical Society le 09/11/2010.

Communications Nationales	– *Séminaire du laboratoire Centre de Mathématique et de Leurs Applications* (CMLA), Ecole Normale Supérieure de Cachan (2004).
Communications Internationales	– *Inégalités de Sobolev sur le groupe de Heisenberg*, IX encuentro de matemáticas de l'Escuela Politécnica Nacional (EPN), Quito, Equateur (2003).

ENSEIGNEMENTS

Contexte: Enseignement effectué à l'Université René Descartes (Paris V), à l'EPN à Quito-Equateur, à l'ENSIIE et à l'Université d'Evry Val d'Essonne.

Résumé: Ces activités représentent un total de 458 heures (équivalent TD).

	Enseignement	Année	Cours	TD
Paris V	DEUG 1ère année	2003, 2004, 2005		192 H
EPN	Théorie des Distributions	2003	12 H	12 H
	Théorie de la Mesure	2009	18 H	18 H
ENSIIE	Mathématiques financières	2009	9 H	
	Encadrement de projet	2009		82 H
	Probabilités	2010	8 H	40 H
	Chaînes de Markov	2010		10 H
UEVE	Maths pour Economistes	2010		18 H
	Analyse Numérique	2010		16 H
Total			47 H	388 H

Livre publié: Le livre *Espacios de Lebesgue y de Lorentz* (espagnol 300 p.) a été publié en 2010 dans la collection "Cuadernos de Matemática" par le département de mathématiques de l'Escuela Politécnica Nacional à Quito - Equateur.

EXPÉRIENCE PROFESSIONNELLE

2007-2009 — **Analyste de Risque de Marché**
Société Générale, Paris-La Défense. Département des Risques, dérivés actions et produits exotiques.
Encadrement de stages niveau M1/M2.

2006-2007 — **Consultant**
MargO Conseil, conseil en mathématiques financières et modélisation informatique, mission à la Société Générale, Paris-La Défense.

FORMATION ET DIPLÔMES

2006 — **Doctorat en mathématiques**, Mention très honorable
Ecole Normale Supérieure de Cachan

2002 — **Master mathématiques appliquées**, Mention bien
Ecole Polytechnique

2001 — **Diplôme d'ingénieur**
Ecole Polytechnique (promotion X98)

1999 — **Deug-Licence**
Escuela Politécnica Nacional - Quito, Equateur (Amérique du Sud)

RESPONSABILITÉS ADMINISTRATIVES

2010-2011 — Mise en place d'une coopération enseignants/étudiants entre l'ENSIIE (Evry) et l'EPN (Quito) avec actuellement un étudiant de l'EPN en échange à l'ENSIIE.

2009-2010 — Organisateur/responsable du séminaire des enseignants de l'ENSIIE

2005-2010 — Président de l'association AMARUN, Trésorier à partir de juillet 2010

2004-2005 — Représentant des doctorants à l'Ecole Doctorale de l'ENS Cachan

2) Curriculum Vitæ

Diego Chamorro
Né le 01 avril 1977
Nationalité franco-équatorienne
Marié

Coordonnées

Personnelles	60, rue du 11 novembre 1918 94700 Maisons-Alfort 06 29 80 56 26
Professionnelles	Laboratoire d'Analyse et Probabilités, Université d'Evry Val d'Essonne & Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise (ENSIIE) 1, square de la Résistance 91025 Evry, France `diego.chamorro@polytechnique.org` www.amarun.org/Diego Chamorro

Fonctions récentes

Depuis octobre 2009	**Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (50%)** Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise (ENSIIE)

Situation antérieure

2007-2009	**Analyste de Risque de Marché** Société Générale. Département des Risques, dérivés actions et produits exotiques. Etude et suivi des risques de marché induit par les produits exotiques.
2006-2007	**Consultant** MargO Conseil. Conseil en mathématiques financières et modélisation informatique, mission à la Société Générale au Front Office dérivés actions et dérivés sur fonds.
2002-2005	**Allocataire de recherche AMX**, **Moniteur** Université René Descartes (Paris V)

Formation et diplômes

2006	**Doctorat en mathématiques**, Mention très honorable Ecole Normale Supérieure de Cachan Sujet de thèse : Inégalités de Gagliardo-Nirenberg précisées sur le groupe de Heisenberg Directeur de thèse : Yves Meyer
2002	**Master mathématiques appliquées (MVA)**, Mention bien Ecole Polytechnique

2001	**Diplôme d'ingénieur** Ecole Polytechnique (promotion X98)
1999	**Deug-Licence** Escuela Politécnica Nacional - Quito, Equateur (Amérique du Sud)
1995	**Baccalauréat scientifique**, Mention très bien Lycée Isaac Newton - Quito, Equateur (Amérique du Sud)

COMPÉTENCES

[COMPÉTENCES GÉNÉRALES]

Fondamentales	Analyse harmonique, analyse fonctionnelle, ondelettes, mathématiques pour l'ingénieur, traitement du signal, calcul stochastique, mathématiques financières.
Techniques	Analyse des risques de marchés. Rétro-ingénierie. Suivi des risques engendrés par les produits financiers complexes.

[COMPÉTENCES LINGUISTIQUES]

Anglais	Lu, écrit
Espagnol	Bilingue
Portuguais	Bases

[COMPÉTENCES INFORMATIQUES]

Systèmes d'exploitation	Linux, MS-Windows
Logiciels scientifiques	Scilab, Matlab, LaTex
Langages de programmation	Java, Pascal

ACTIVITÉS CULTURELLES, SPORTIVES ET ASSOCIATIVES

[AMARUN]

Description	AMARUN est une association créée avec l'objectif de développer et de promouvoir les sciences exactes en Equateur.
Activités	– Organisation de cours d'été, de conférences scientifiques, rédaction de matériel pédagogique (Feuilles de TD, Polycopiés). – Interviews à des personnalités scientifiques de renommée internationale (Prix Nobel de Physique, Médaille Fields, Membres de l'Académie des Sciences). – Développement d'échanges d'étudiants, création d'un réseau de chercheurs, ouverture à l'international (nous sommes présent sur plus de 12 pays différents).
Poste Occupé	Président de 2005 à 2010 puis Trésorier à partir de 2010.

[MUSIQUE]

Guitare classique pratiquée depuis plus de dix ans.

[SPORT]

Escrime de compétition (Epée), ancien membre de l'équipe d'escrime de l'Ecole Polytechnique. Participation à des compétitions en France et à l'étranger.

3) Activités pédagogiques

Cette section présente le contexte et le contenu des enseignements dans lesquels je suis intervenu à l'Université René Descartes (Paris V), à l'Escuela Politécnica Nacional (EPN), à l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise (ENSIIE) puis à l'Université d'Evry Val d'Essonne (UEVE).

Université René Descartes (Paris V)

[Synthèse]

Contexte	Les activités d'enseignement présentées ci-dessous ont été effectuées à l'Université René Descartes (Paris V), dans le cadre d'un contrat de monitorat du CIES.
Travail réalisé	Chaque année j'ai participé à la rédaction des feuilles de TD, à la mise en place de « résumés pédagogiques » en complément des notes de cours, ainsi qu'à la correction des examens. J'ai assuré, en outre, des heures de tutorat pédagogique mis en place lors de la dernière année du monitorat.
Résumé	Ces activités représentent un total de 192 heures (équivalent TD).

Enseignement	Année/ Semestre	TD
DEUG MASS/MIASS	1ère année (2002-2003)/ 2ème	64 H
	1ère année (2003-2004)/ 2ème	64 H
	1ère année (2004-2005)/ 1er	64 H
Total		192 H

[1 ère année, 1er semestre]

Contenu	Ensembles, applications, dénombrement, suites numériques, nombres complexes, limites et continuité, dérivabilité, développements limités, espaces vectoriels, matrices, déterminants.
Responsable	Antoine Chambaz (Enseignant chercheur, Paris V)

[1 ère année, 2ème semestre]

Contenu	Déterminants, système d'équations linéaires, limites et continuité, équivalents, dérivabilité, formule de Taylor, développements limités, étude de fonctions, intégrale de Riemann, primitivation.
Responsable	Christigne Graffigne (PdU, Paris V)

Dans tous ces cours j'ai eu à ma charge un groupe de TD composé d'une trentaine d'étudiants. Suite à la réforme LMD, le contenu des cours a été modifié entre le premier et le deuxième semestre. Ceci explique la similitude du contenu des cours entre ces deux semestres.

Escuela Politécnica Nacional

[Synthèse]

Contexte	Les activités d'enseignement présentées ci-dessous ont été effectuées à la Escuela Politécnica Nacional (Quito, Equateur) dans le cadre de différents cours d'été. Ces cours on été réalisés en espagnol.
Travail réalisé	Pour chaque cours d'été, un polycopié a été rédigé ainsi que les feuilles de TD et un examen. Pour le cours de théorie de la mesure j'ai mis à disposition des élèves une liste de résumés de cours, des devoirs maisons et des exercices.
Résumé	Ces activités représentent un total de 75 heures (équivalent TD)

Enseignement	Semestre	Cours	TD
Théorie des distributions	été 2003	12 H	12 H
Théorie de la mesure	été 2009	18 H	18 H
Total		30 H	30 H

[Théorie des distributions]

Contenu	Fonctions différentiables, convolution et régularisation, définition et exemples de distributions, opérations sur les distributions, changement de variables, formules des sauts, support des distributions, transformée de Fourier dans L^1, classe de Schwartz, distributions tempérées.
Matériel pédagogique	Polycopié, exercices
Cursus	Licence 3 - mathématiques. Un seul groupe de 12 personnes.
Responsable	Diego Chamorro

[Théorie de la mesure]

Contenu

- Algèbres et fonctions additives d'ensembles, σ-algèbres et mesures, classes monotones, mesures extérieures, théorème de Carathéodory, mesuresBoréliennes, construction de la mesure de Lebesgue, ensembles non-mesurables.
- Limitations de l'intégrale de Riemann, fonctions mesurables, propriétés presque partout, construction de l'intégrale de Lebesgue, espace de fonctions intégrables, théorème de convergence monotone, lemme de Fatou, théorème de convergence dominée, intégrales dépendant d'un paramètre, différents modes de convergence, théorème de Fubini.
- Espaces de Lebesgue, normabilité et convergence, inégalités de Hölder et de Jensen, propriétés de densité.

Devoirs maison	Mesure de Hausdorff et Convolution.
Matériel pédagogique	Polycopié (250 pages), notes de cours (8 leçons), exercices (8 feuilles de TD).
Publications	Le livre *Espacios de Lebesgue y de Lorentz* (espagnol 300p.) reprend l'essentiel du cours de théorie de la mesure. Ce livre a été publié en 2010 dans la collection "Cuadernos de Matemática" par le département de mathématiques de l'Escuela Politécnica Nacional. Une deuxième édition est prévue courant 2011. La deuxième partie du livre est en cours de rédaction. Elle contient notamment une introduction à l'analyse fonctionnelle, une étude des mesures signées, une présentation des espaces de Lorentz ainsi que de nombreuses applications à l'analyse harmonique.
Cursus	Licence 3 - mathématiques. Un seul groupe de 16 personnes.
Responsable	Diego Chamorro

[MATÉRIEL PÉDAGOGIQUE UNIVERSITAIRE]

Contexte	Dans le cadre des activités de l'association Amarun, j'ai rédigé du matériel pédagogique (Résumé, Liste d'exercices, Devoir Maison) destiné aux étudiants et professeurs universitaires.
Contenu	– Analyse niveau L1/L2/L3/M1 – Algèbre Linéaire niveau L1

Voir plus de détails page 25.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE POUR L'INDUSTRIE ET L'ENTREPRISE

[SYNTHÈSE]

Contexte	Les activités d'enseignement présentées ci-dessous ont été effectuées à l' Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise dans le cadre d'un demi-poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche.
Travail réalisé	Préparation de sujets de projets en utilisant des exemples concrets utilisés en salles de marchés. Présentation du métier d'Analyste de Risque de Marché. Correction d'exercices en TD.
Résumé	Ces activités représentent un total de 157 heures (équivalent TD)

Enseignement	Semestre	Cours	TD
Projets informatiques	1er sem. 2009		82 H
Mathématiques financières	1er sem. 2009	9 H	
Probabilités	1er sem. 2010	8 H	40 H
Chaînes de Markov	2me sem. 2010		10 H
Total		17 H	132 H

[PROJETS INFORMATIQUES]

Contenu	Implémentation d'un logiciel d'évaluation (*priceur*) d'options simples (Call & Put) par un algorithme de différences finies, implémentation d'un priceur d'options sur moyenne par une méthode de MonteCarlo, implémentation d'un priceur de VarSwap par une formule fermée et par une méthode de MonteCarlo.
Cursus	Option finance, troisième année de l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise, un groupe de 16 personnes.
Responsable	Vathana Ly Vath (Enseignant chercheur, ENSIIE)

[MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES]

Contenu	Description du métier d'analyste de risque financier : présentation des activités au sein de l'équipe de risque de marché de la Société Générale (produits financiers à barrière, produits sur hedge funds). Explication du modèle Avellaneda pour l'évaluation des options dans un marché à volatilité incertaine.
Cursus	Option finance, troisième année de l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise, un groupe de 70 étudiants.
Responsable	Vathana Ly Vath (Enseignant chercheur, ENSIIE)

[PROBABILITÉS]

Contenu	Dénombrement, Probabilité conditionnelle, Indépendance. Distributions de probabilités, fonctions de répartition, espérance mathématique. Variables aléatoires continues et lois classiques. Théorèmes limites et convergence.
Cursus	Tronc Commun, première année de l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise, deux groupe de 25 étudiants.
Responsable	Vathana Ly Vath (Enseignant chercheur, ENSIIE)

[Martingales et Chaînes de Markov]

Contenu	Filtrations, Espérance conditionnelle, Martingales, Marches Aléatoires, Chaînes de Markov.
Cursus	Option, deuxième année de l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise, un groupe de 20 étudiants.
Responsable	Abass Sagna (Enseignant chercheur, ENSIIE)

Université d'Evry Val d'Essonne

[Synthèse]

Contexte	Les activités d'enseignement présentées ci-dessous ont été effectuées à l' Université d'Evry Val d'Essonne dans le cadre d'un demi-poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche.
Travail réalisé	Préparation de sujets de TP. Correction d'exercices en TD.
Résumé	Ces activités représentent un total de 34 heures (équivalent TD)

Enseignement	Semestre	TD	TP
Projets infos L2 PCSPI	automne 2010		24 H
Mathématiques L3 Economie	automne 2010	18 H	
Total		18 H	24 H

[Projets informatiques]

Contenu	Introducion à l'analyse numérique et aux méthodes d'intégration numérique en utilisant le logiciel SCILAB. Introduction au langage Scilab, implémentation de la méthode des Trapèzes et des méthode de type Newton-Cotes (Simpson, Simpson 3/8). Etude empirique de l'erreur. Génération de marches aléatoires et modélisation du mouvement brownien. Estimation d'intégrales par des méthodes de Monte-Carlo.
Cursus	Deuxième année de la filière PCSPI, deux groupes de 20 personnes.
Responsable	ElHocine Sadi (Enseignant chercheur, UEVE)

[Mathématiques pour Economistes]

Contenu	Equations et systèmes linéaires de récurrences, équations différentielles linéaires. Optimisation sans contraintes et avec contraintes.
Cursus	L3 Economie, un groupe de 20 personnes.
Responsable	Lucilla Corrias (Enseignant chercheur, UEVE)

4) Synthèse des activités de recherche (Thèse & Post Doc)

Cette section résume mes travaux réalisés pendant ma thèse et au cours d'un post-doctorat. Elle détaille les publications et les communications, ainsi que diverses participations relatives à mes activités de recherche.

Résumé

[Thèse de doctorat]

Intitulé	**Inégalités de Gagliardo-Nirenberg précisées sur le groupe de Heisenberg** Lien TEL :http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00132135/fr/
Encadrement	Yves Meyer, Professeur Emérite, ENS Cachan
Institution	Laboratoire : Centre de Mathématique et de Leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
Financement	Allocation de recherche AMX
Soutenance et jury	Thèse soutenue le 6 janvier 2006, devant un jury composé de : *Président :* Jean-Michel Morel, ENS Cachan *Rapporteurs :* Aline Bonami, Université d'Orléans Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, Université d'Evry
Description	J'ai étudié pendant ma thèse diverses généralisations possibles des inégalités de Gagliardo-Nirenberg précisées. En utilisant des techniques nouvelles, reliées à la décomposition spectrale du Laplacien, j'ai obtenu des améliorations aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg dans le cadre des groupes de Lie stratifiés et à croissance polynômiale.
Mots-clés	Inégalités de Gagliardo-Nirenberg précisées, groupes de Lie stratifiés, décomposition de Littlewood-Paley, espaces de Besov, décomposition spectrale du Laplacien.
Publications	2 articles publiés [1], [2] et 1 article soumis [3], 1 conférence internationale [6] et 1 conférence nationale [9].

[Post-doctorat]

Intitulé	**Etude de l'équation quasi-géostrophique**
Encadrement	Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, Université d'Evry
Institution	Laboratoire : LAP, Université d'Evry
Financement	demi-ATER à l'ENSIIE
Description	J'ai étudié la régularité des solutions de l'équation quasi-géostrophique avec diffusion critique en utilisant les espaces de Hardy moléculaires. Cette technique est très récente et permet d'étudier simplement la régularité des solutions des EDP par un principe de dualité. Il est intéressant de noter que cette méthode pourrait étudier avec succès l'équation quasi-géostrophique avec diffusion sur-critique. J'étudie également des versions stochastiques de cette équation afin de vérifier si cette méthode moléculaire peut se transposer à ce cadre.
Mots-clés	Equation quasi-géostrophique, espaces de Hardy, espace bmo, équations de transport-diffusion, équations différentielles stochastiques.
Publications	2 articles soumis [4], [5], 1 conférence internationale [7], 6 conférences nationales [10], [11], [12], [13], [14], [15] et participation à 4 conférences internationales [16], [17], [18], [19].

PUBLICATIONS

2010	[1]	Diego Chamorro, *Improved Sobolev Inequalities and Muckenhoupt weights on stratified Lie groups*, J. Math. Anal. Appl., vol 377, p. 695–709, 2011.
2010	[2]	Diego Chamorro, *Some functional inequalities on polynomial volume growth Lie groups*, accepté, Canadian Journal of Mathematics, 2010.
2010	[3]	Diego Chamorro, *A counterexample for Improved Sobolev Inequalities over the 2-adic group*, soumis, Communications of the Korean Mathematical Society, 2010.
2010	[4]	Diego Chamorro, *Remarks on a fractional diffusion transport equation with applications to the critical dissipative quasi-geostrophic equation*, soumis, Asymptotic Analisis, 2010
2010	[5]	Diego Chamorro & Pierre Gilles Lemarié-Rieusset, *Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes*, soumis, Revista Matemática Iberoamericana, 2010

COMMUNICATIONS

[CONFÉRENCES INTERNATIONALES]

2003	[6]	Diego Chamorro, *Inégalités de Sobolev sur le groupe de Heisenberg*, IX encuentro de matemáticas de l'Escuela Politécnica Nacional, Quito, Equateur.
juillet 2010	[7]	XII Encuentro de Matemáticas y sus Aplicaciones, *EPN*, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.
Mai 2011	[8]	Séminaire du Laboratoire, *ICMAT*, Madrid, Espagne (Invitation de Diego Córdoba)

[COMMUNICATIONS NATIONALES]

2004	[9]	Séminaire du laboratoire, *CMLA*, , Ecole Normale Supérieure de Cachan.
Avril 2010	[10]	Séminaire du Laboratoire, *LATP*, Université Paul Cézanne, Marseille.
juin 2010	[11]	Séminaire du Laboratoire, *LAP*, Université d'Evry Val d'Essonne, Evry.
juillet 2010	[12]	IIième école d'été franco-brésilienne, *"Dynamique des fluides et EDP"*, Institut Camille Jordan - Université Lyon 1, Lyon.
novembre 2010	[13]	Séminaire du Laboratoire, *IRMAR*, Université de Rennes 1, Rennes.
janvier 2011	[14]	Séminaire du groupe de travail, *ENS/P6/P7*, Institut Henri Poincaré, Paris.
février 2011	[15]	Séminaire du groupe de travail, *CEREMADE*, Université Paris-Dauphine, Paris.

PARTICIPATION À DES CONFÉRENCES

Mars 2010	[16]	Groupe de travail, *Journées Dynamo*, Rennes, France
Juin 2010	[17]	Congrès, *Emerging topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations*, SIAM, Barcelona Espagne
Janvier 2011	[18]	Groupe de travail, *Maths à Bayonne*, Bayonne, France
Février 2011	[19]	Colloque, *Maximum principles, fractional diffusion and differential or integral inequalities for PDEs and SPDEs*, Evry, France
Mars 2011	[20]	Groupe de travail, *Journées Dynamo*, Lyon, France

5) Description des activités de recherche (Thèse)

Contexte

Dans le cadre Euclidien ($\mathbb{R}^n$), nous pouvons distinguer trois types d'inégalités de Sobolev précisées en fonction de la méthode utilisée dans leurs démonstrations et surtout en fonction des intervalles de définition des paramètres qui déterminent les espaces fonctionnels (toutes les définitions sont rappelées dans la page suivante).

La première méthode est due à P. Gérard, F. Oru et Y. Meyer [GMO 97], elle se base sur une décomposition de Littlewood-Paley et sur des résultats d'interpolation appliqués aux blocs dyadiques. Pour une fonction f telle que $f \in \dot{W}^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s_1,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{1}$$

où $1 < p < q < +\infty$, $\theta = p/q$, $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ et $-\beta < s < s_1$. Insistons sur le fait que la valeur $p = 1$ est interdite ici. Nous écrivons $\dot{W}^{s,p}$ pour l'espace de Sobolev homogène d'indices (s,p) et $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$ pour l'espace de Besov homogène d'indices $(-\beta, \infty, \infty)$.

La deuxième méthode, étudiée par M. Ledoux dans [Le 03], utilise les propriétés de semi-groupe du Laplacien et de son noyau de la chaleur, et elle nous permet de traiter le cas $p = 1$. Si $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{2}$$

où $1 \leq p < q < +\infty$, $\theta = p/q$ et $\beta = \theta/(1-\theta)$.

Finalement, la troisième méthode proposée par A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies & R. De Vore dans [CDDDV 03] fait appel à une estimation faible des coefficients d'ondelettes et à l'inégalité isoperimétrique. Elle fournit, pour une fonction f telle que $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, l'estimation qui suit :

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} \leq C\|f\|^{1/q}_{BV}\|f\|^{1-1/q}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{3}$$

où $1 < q \leq 2$, $0 \leq s < 1/q$ et $\beta = (1-sq)/(q-1)$. Si $s = 0$, ce résultat implique (2) avec $p = 1$, mais il est limité par le fait que $1 < q \leq 2$.

Indiquons rapidement que ces types d'inégalités sont d'une grande utilité en analyse et en E.D.P.

Dans ma thèse je me suis intéressé à étudier ces inégalités dans le cadre des groupes de Lie stratifiés qui sont une généralisation assez naturelle de $\mathbb{R}^n$ lorsqu'on modifie les dilatations (cf (4)). Cependant, cette simple modification induit de nombreuses complications techniques à plusieurs niveaux car toute la structure est alors transformée : par exemple, la géometrie sous-jacente est totalement différente ([Str 92] et [GN 96]) ce qui rend les techniques utilisées dans [CDDDV 03] pratiquement intransposables. Observons également que l'utilisation de la transformation de Fourier, et des outils classiques associés, est loin d'être aussi commode et directe que dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

Le but de ma recherche était alors de développer des techniques qui permettent de retrouver ces inégalités. Pour cela, l'outil qui s'est révélé le plus efficace et le plus général est la décomposition spectrale du sous-Laplacien associée à des estimations sur le noyau de la chaleur.

Principaux résultats

Avant d'énoncer les théorèmes, je rappelle rapidement la définition de groupe de Lie stratifiés et les définitions des espaces fonctionnels à poids qui interviennent dans ces estimations.

Définitions

Un groupe homogène $\mathbb{G}$ est la donnée de $\mathbb{R}^n$ équipé d'une structure de groupe de Lie et d'une famille de dilatations qui sont des automorphismes de groupe. Nous définissons les dilatations en fixant des entiers

$(a_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $1 = a_1 = ... = a_m \leq ... \leq a_n$ et en posant pour $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \delta_\alpha[x] = \alpha x = (\alpha^{a_1}x_1, ..., \alpha^{a_n}x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Du point de vue de la mesure, les groupes homogènes se comportent d'une façon classique, puisque la mesure de Lebesgue dx est bi-invariante et coïncide avec la mesure de Haar.

Pour un groupe homogène $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot, \delta)$ on considère son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont les éléments sont des champs de vecteurs définis par la formule $(X_j f)(x) = \frac{\partial f(x\cdot y)}{\partial y_j}\Big|_{y=0}$. Ces champs de vecteurs sont homogènes de degré a_j car on a l'identité $X_j(f(\alpha x)) = \alpha^{a_j}(X_j f)(\alpha x)$.

Nous dirons alors que $\mathbb{G}$ est *stratifié* si $\mathfrak{g}$ se décompose comme une somme des sous-espaces linéaires $\mathfrak{g} = \bigoplus_{1\leq j\leq k} E_j$ tels que E_1 engendre l'algèbre $\mathfrak{g}$ et $[E_1, E_j] = E_{j+1}$ pour $1 \leq j < k$ et $[E_1, E_k] = \{0\}$ et $E_k \neq \{0\}$, mais $E_j = \{0\}$ si $j > k$.

Si nous fixons les champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ tels que $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$ $(m < n)$, alors la famille $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ es une base de E_1 et génère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ce qui est précisément la condition de Hörmander. Le gradient est donc défini par $\nabla = (X_1, ..., X_m)$ et le sous-Laplacien par $\mathcal{J} = \nabla^*\nabla = -\sum_{j=1}^m X_j^2$.

Pour la définition des espaces fonctionnels, je vais systématiquement utiliser des espaces à poids. Nous dirons qu'une fonction ω localement intégrable sur $\mathbb{G}$ est un poids de Muckenhoupt de classe A_p pour $1 < p < +\infty$ si l'on a

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < +\infty.$$

Lorsque $p = 1$ nous écrirons que $\omega \in A_1$ si $\mathcal{M}_B(\omega)(x) \leq C\omega(x)$ $(\forall x \in \mathbb{G})$ où $\mathcal{M}_B(f) = \sup\limits_{B\ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy$ est la fonction maximale de Littlewood-Paley.

La raison principale pour considérer ces poids est leur connexion avec les fonctions maximales qui nous permettent de donner une démonstration très simple des inégalités (1).

Finalement, voici les caractérisations utilisées des espaces fonctionnels à poids :

- **Espaces de Lebesgue** $L^p(\mathbb{G}, \omega)$:

$$\|f\|_{L^p(\omega)}^p = p\int_0^{+\infty} \sigma^{p-1}\omega(\{x \in \mathbb{G} : |f(x)| > \sigma\})d\sigma.$$

- **Espace de Lorentz** $L^{p,\infty}(\mathbb{G}, \omega)$:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\omega)} = \sup_{\sigma>0}\{\sigma\ \omega(\{x \in \mathbb{G} : |f(x)| > \sigma\})^{1/p}\}.$$

- **Espaces de Sobolev** $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{G}, \omega)$. Pour $\omega \in A_p$ on écrit

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\omega)} = \|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{L^p(\omega)} \quad (1 < p < +\infty)$$

  si $p = s = 1$ on note $\|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\omega)} = \|\nabla f\|_{L^1(\omega)}$.

- **Espaces Sobolev faibles** $\dot{W}^{s,p}_\infty(\mathbb{G}, \omega)$:

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}_\infty(\omega)} = \|\mathcal{J}^{s/2}f\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \quad (1 < p < +\infty)$$

- **Espaces de Besov** $\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{G}, \omega)$.

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p(\omega)} = \left[\int_0^{+\infty} t^{(m-s/2)q}\left\|\frac{\partial^m H_t f}{\partial t^m}(\cdot)\right\|_{L^p(\omega)}^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q}$$

  pour $1 \leq p, q \leq +\infty, s > 0$ et m un entier tel que $m > s/2$. Pour terminer, pour les espaces de Besov d'indices $(-\beta, \infty, \infty)$ nous avons $\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_\infty} = \sup\limits_{t>0}\ t^{\beta/2}\|H_t f\|_{L^\infty}$.

THÉORÈMES

Le théorème principal étudie le cas $p = 1$ pour les inégalités de Sobolev précisées sur les groupes de Lie stratifiés :

Théorème 1 *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié et soit ω un poids dans la classe de Muckenhoupt A_1. Si $\nabla f \in L^1(\mathbb{G}, \omega)$ et $f \in \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{G})$, alors*

- **[Inégalités fortes]**
$$\|f\|_{L^q(\omega)} \leq C\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1(\omega)}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} \tag{5}$$
où $1 < q < +\infty$, $\theta = 1/q$ et $\beta = \theta/(1-\theta)$.
- **[Inégalités faibles]**
$$\|f\|_{\dot{W}_{\infty}^{s,q}(\omega)} \leq C\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1(\omega)}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} \tag{6}$$
où $1 < q < +\infty$, $0 < s < 1/q < 1$, $\theta = 1/q$ et $\beta = \frac{1-sq}{q-1}$.

Il est possible de voir inégalité (6) comme une amélioration faible de (3). En effet, l'inégalité obtenue dans [CDDDV 03] utilise en réalité un espace de Besov :

$$\|f\|_{\dot{B}_q^{s,q}} \leq C\|f\|^{1/q}_{BV}\|f\|^{1-1/q}_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}.$$

Cette estimation implique (3) seulement si $1 < q \leq 2$ car nous avons ici $\dot{B}_q^{s,q} \subset \dot{W}^{s,q}$. La restriction $q \in]1,2]$ est donc une sérieuse limitation car pour $q > 2$ cette injection est inverséee. Pour notre part, l'inégalité faible que nous démontrons ne présente pas cette limitation : q est défini dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Remarquons que, même dans $\mathbb{R}^n$, une version forte de (6) reste encore un problème ouvert pour $q > 2$.

Indiquons également qu'une légère modification du théorème 1 permet de faire intervenir l'espace des fonctions à variations bornées BV au lieu de l'espace de Sobolev $\dot{W}^{1,1}$.

Le deuxième résultat donne l'outil fondamental pour la démonstration du théorème 1 :

Théorème 2 (Pseudo-inégalité de Poincaré modifiée) *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié, $\omega \in A_1$ et $\nabla f \in L^1(\mathbb{G}, \omega)$. Pour $0 \leq s < 1$ et pour $t > 0$, nous avons*

$$\|\mathcal{J}^{s/2}f - H_t\mathcal{J}^{s/2}f\|_{L^1(\omega)} \leq C\, t^{\frac{1-s}{2}}\|\nabla f\|_{L^1(\omega)}. \tag{7}$$

Où $\mathcal{J}$ est un sous-Laplacien sur $\mathbb{G}$ invariant par rapport à la famille de dilatations et H_t est le semi-groupe de la chaleur associé.

Pour terminer nous disposons aussi du résultat suivant que nous démontrons sans utiliser une décomposition de Littlewood-Paley.

Théorème 3 *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié et $\omega \in A_p$ avec $1 < p < +\infty$. Si $f \in \dot{W}^{s_1,p}(\mathbb{G}, \omega)$ et $f \in \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{G})$ alors*
$$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}(\omega)} \leq C\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s_1,p}(\omega)}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} \tag{8}$$
où $1 < p < q < +\infty$, $\theta = p/q$, $s = \theta s_1 - (1-\theta)\beta$ et $-\beta < s < s_1$.

Pour les démonstrations de ces trois théorèmes et plus de détails, voir [1].

EXTENSIONS DES RÉSULTATS

Une fois que j'ai démontré ces résultats sur les groupes de Lie stratifiés, il était assez naturel de se demander jusqu'à quel point on peut généraliser ce type de techniques. J'ai donc traité trois extensions possibles en considérant à chaque fois des cadres différents.

- ⋆ **Groupes de Lie nilpotents** : Dans le cadre des groupes de Lie stratifiés, la structure de dilatation joue un rôle totalement déterminant dans le sens où l'on exige que les différents objets mathématiques vérifient des propriétés d'homogénéité par rapport à ces dilatations. Que se passe t-il lorsqu'on ne dispose plus de cette structure de dilatation ? Un premier exemple est donné par les groupes de Lie nilpotents qui ne sont pas forcément munis d'une structure de dilatation.

Soit donc $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. On pose $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}]$ pour $i \geq 2$. La suite $(\mathfrak{g}_i)_{i>0}$ est une suite décroissante de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$. Nous dirons alors qu'une algèbre de Lie est nilpotente de rang r si l'on a $\mathfrak{g}_{r+1} = \{0\}$. Un groupe de Lie sera *nilpotent* de rang r si son algèbre vérifie cette propriété. Bien évidemment, les groupes de Lie stratifiés sont un exemple très particulier de groupes nilpotents.

Dans ce cadre, les techniques utilisées se généralisent sans problèmes et nous avons les théorèmes 1, 2 et 3 dans un cadre fonctionnel sans poids, voir [These-DCh].

⋆ **Groupes de Lie à croissance polynômiale** : Nous pouvons aller encore plus loin dans la généralisation en supprimant la condition de nilpotence de l'algèbre de Lie. Le cadre est alors celui des groupes de Lie à croissance polynômiale dont nous rappelons rapidement la définition. Soit G un groupe de Lie connexe muni de sa mesure de Haar, nous dirons qu'il est *unimodulaire* si dx est invariant à gauche et à droite sous l'action du groupe. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et on fixe une famille $X = \{X_1, ..., X_k\}$ de champs de vecteurs invariants à gauche vérifiant la condition de Hörmander : l'algèbre de Lie est engendrée par les X_i pour $i = 1, ..., k$. Il est bien connu (cf. [Var 92]) qu'il existe pour de tels groupes un entier positif d ainsi que deux constantes c_1 et c_2 tels que, pour tout $r \in]0, 1[$, on ait pour le volume $V(r)$ de la boule $B(x, r)$ la relation $c_1 r^d \leq V(r) \leq c_2 r^d$. Cet entier d est la dimension locale de (G, X). Dans le cas où $r \geq 1$, nous avons seulement deux possibilités :

(i) Soit le groupe est *croissance polynômiale*, ce qui signifie qu'il existe un entier D et deux constantes c_1' et c_2' tels que pour tout $r \geq 1$, $c_1' r^D \leq V(r) \leq c_2' r^D$.

(ii) Soit le groupe est *croissance exponentielle* : il existe $\alpha, \beta, \sigma, \delta > 0$ tels que pour tout $r \geq 1$, on a $\alpha e^{\beta r} \leq V(r) \leq \sigma e^{\delta r}$.

Lorsque G est à croissance polynômiale, l'entier D est la dimension à l'infini de G.

Les groupes de Lie à croissance polynômiale sont donc bien une extension des cas traités précédemment, puisque tous les groupes de Lie nilpotents et les groupes de Lie stratifiés sont unimodulaires à croissance polynômiale. L'utilisation des techniques développées repose sur les estimations sur le noyau de la chaleur qui sont disponibles dans ce cadre et il est alors possible de généraliser les théorèmes précédents (cf. [2]).

⋆ **Groupes p-adiques** : La dernière généralisation traitée dans ma thèse étudie ce qui se passe si l'on prend en compte des groupes ayant certaines propriétés topologiques particulières. J'ai donc étudié les groupes p-adiques, qui sont des groupes totalement discontinus, dont voici rapidement les traits les plus marquants : soit p un nombre premier, pour $x \in \mathbb{Z}$ on définit la valuation p-adique de x par $\gamma(x) = \max\{r : p^r | x\} \geq 0$ et pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ on écrit $\gamma(x) = \gamma(a) - \gamma(b)$. Nous construisons une norme en posant $|x|_p = p^{-\gamma}$ si $x \neq 0$. On détermine alors le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ comme le complété de $\mathbb{Q}$ en utilisant la norme $|\cdot|_p$. Dans mon étude, je me suis concentré sur l'ensemble des entiers 2-adiques défini par $\mathbb{Z}_2 = \{x \in \mathbb{Q}_2 : |x|_2 \leq 1\}$.
La plus grande difficulté consiste à donner une bonne définition des espaces fonctionnels puisqu'on ne dispose pas ici d'une approche infinitésimale. J'ai donc privilégié la caractérisation des espaces de Sobolev et de Besov par une décomposition de Littlewood-Paley basée sur une approche par martingales (cf. [3]).

Pour les inégalités de Sobolev précisées, je me suis concentré sur les estimations faisant intervenir l'espace des fonctions à variations bornées : soit f une fonction sur $\mathbb{Z}_2$, nous dirons qu'elle appartient à l'espace BV s'il existe une constante C telle que l'on ait

$$\int_{\mathbb{Z}_2} |f(x+y) - f(x)| dx < C|y|_2, \quad (\forall y \in \mathbb{Z}_2).$$

De façon assez surprenante j'ai obtenu le résultat suivant qui est à la base de quelques contre-exemples

Théorème 4 *Sur le groupe $\mathbb{Z}_2$, on dispose de l'égalité d'espaces : $BV = \dot{B}_1^{1,\infty}$.*

La question qui se pose ici est de savoir la validité de la majoration

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \tag{9}$$

sur ce groupe p-adique. Remarquons que ce résultat est vrai dans le cadre euclidien comme dans le cas des groupes de Lie stratifiés. La grande différence avec ces groupes réside dans le fait que pour $\mathbb{Z}_2$ nous disposons du théorème 4 qui nous permet d'identifier l'espace des fonctions à variation bornée à l'espace de Besov d'indices $(1, \infty, 1)$. Cette inégalité devient alors

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}.$$

Observons que l'estimation ci-dessus est fausse pour $\mathbb{R}^n$, cette remarque donne un élément de réponse sur la validité de (9) que nous développons dans le théorème suivant :

Théorème 5 *L'inégalité (9) est fausse dans $\mathbb{Z}_2$: il n'existe pas de constante absolue C telle que l'on ait, pour toute fonction $f \in BV \cap \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, l'estimation :*

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{BV}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}.$$

On pourrait imaginer que la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$ est trop petite pour que cette inégalité soit vraie mais il n'en est rien : on peut considérer des normes plus grandes (par l'emboîtement des espaces de Besov) et nous pouvons encore construire de façon similaire un contre exemple.

Théorème 6 *L'inégalité suivante est fausse dans $\mathbb{Z}_2$ pour $q > 1$:*

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{\dot{B}_1^{1,q}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}$$

La conclusion la plus marquante est que les inégalités de Sobolev précisées dépendent de la structure du groupe sur lequel on défini les espaces fonctionnels (cf. [These-DCh], [3]).

Références

[These-DCh] D. Chamorro. *Inégalités de Gagliardo-Nirenberg précisées sur le groupe de Heisenberg*, Thèse de troisième cycle. ENS Cachan (2006).

[CDDDV 03] A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies & R. De Vore. *Harmonic Analysis of the space BV*. Rev. Mat. Iberoamericana 19, n°1, 235-263 (2003).

[Fo 75] G. Folland. *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*. Ark. Mat. 13, 161-208 (1975).

[Fo-Ste 82] G. Folland & E. M. Stein. *Hardy Spaces on homogeneous groups*. Mathematical Notes, 28, Princeton University Press (1982).

[FMV 06] G. Furioli, C. Melzi & A. Veneruso. *Littlewood-Paley decomposition and Besov spaces on Lie groups of polynomial growth.* Math. Nachr. 279, n° 9-10, 1028-1040 (2006).

[GR 85] J. García-Cuerva & J.L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*. Mathematics studies 116, North Hollet (1985).

[GN 96] N. Garofalo & D Nhieu. *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLIX, 1081-1144 (1996).

[GMO 97] P. Gérard, Y. Meyer & F. Oru. *Inégalités de Sobolev Précisées*. Equations aux Dérivées Partielles, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, exposé n° IV (1996-1997).

[Gr 04] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Prentice Hall (2004).

[Hu 84] A. Hulanicki. *A functional calculus for Rocklet operators on nilpotent Lie groups*. Studia Mathematica T. LXXVIII (1984).

[Le 03] M. Ledoux. *On improved Sobolev embedding theorems*. Math. Res. Letters 10, 659-669 (2003).

[LeR 07] P. G. Lemarié-Rieusset. *Uniqueness for the Navier-Stokes problem. Remarks on a theorem of Jean-Yves Chemin.* Nonlinearity 20, 1475-1490 (2007).

[Sa 79] K. Saka. *Besov Spaces and Sobolev spaces on a nilpotent Lie group*. Thoku. Math. Journ. Vol. 31, p. 383-437 (1979).

[Ste 70] E. M. Stein. *Topics in Harmonic analysis*. Annals of mathematics studies, 63. Princeton University Press (1970).

[Ste 93] E. M. Stein. *Harmonic Analysis*. Princeton University Press (1993).

[Str 92] R. Strichartz. *Self-similarity on nilpotent Lie groups*. Contemporary Mathematics, volume 142, 123-157 (1992).

[VSC 92] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste & T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*. Cambridge Tracts in Mathematics, 100 (1992).

6) PROJETS DE RECHERCHE ACTUELS (POST DOC)

Cette section présente mes activités de recherche actuelles dans le cadre d'une collaboration avec Pierre Gilles Lemarié-Rieusset (PdU, Université d'Evry Val d'Essonne).

CONTEXTE

Nous nous sommes proposés d'étudier l'équation quasi-géostrophique qui est déterminée par l'expression suivante

$$\begin{cases} \partial_t \theta = \nabla(v \cdot \theta) - \Lambda^{2\alpha}\theta \\ \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \end{cases} \tag{10}$$

pour $t \in [0,T]$ avec $v = (-R_2\theta, R_1\theta)$ et R_i sont les transformées de Riesz, et où $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ est l'opérateur de Calderón défini au niveau de Fourier par $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi|\widehat{f}(\xi)$. Nous verrons par la suite à quels espaces fonctionnels appartiennent les fonctions v et θ_0.

Il existe dans la littérature de nombreux résultats concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de l'équation quasi-géostrophique (10). Voici quelques résultats récents, pour cela il est parfois utile de considérer trois régimes pour l'étude de cette équation différentielle :

- *Cas sous-critique* ($1/2 < \alpha$) *:*
  Il a été montré que l'équation (10) possède des solutions faibles globales pour toute donnée initiale dans L^2 et que ces solutions sont régulières. Pour plus de détails voir [Re 95] et [Wu 01] ci-dessous.
- *Cas critique* ($\alpha = 1/2$) *:*
  Ici, un premier résultat (cf. [CCW 01]) donne l'existence et l'unicité des solutions classiques globales, si la donnée initiale est petite en norme L^∞.
- *Cas sur-critique* ($0 < \alpha < 1/2$) *:*
  Dans [CW 08], les auteurs obtiennent un résultat de régularité pour cette équation du type suivant : si θ est une solution faible telle que $\theta \in \mathcal{C}^\delta$ avec $\delta > 1 - 2\alpha$ dans l'intervalle $[t_0, t]$, alors θ est en fait une solution classique sur $]t_0, t]$.

Une des questions qui se pose est de retrouver ce type de résultats en évitant la condition de taille « petite ». Dans cette direction, Kiselev, Nazarov et Volberg ont montré dans [KNV 07] l'existence globale de solutions régulières pour toute donnée initiale périodique $\mathcal{C}^\infty$.

Plus récemment, en juillet 2009, Kiselev et Nazarov présentent dans [KN 09] une caractérisation de la régularité Höldérienne des solutions de l'équation quasi-géostrophique critique ($\alpha = 1/2$) en utilisant les propriétés du pré-dual des espaces de Hölder. En effet, en utilisant comme point de départ des fonctions de test qui vérifient de « bonnes » estimations, il est possible d'en déduire une régularité Höldérienne des solutions de l'équation (10) en transferant l'évolution dans ces fonctions de test et en observant comment se transforment les estimations initialement demandées.

TRAVAIL EN COURS

Deux voies de recherche se déduisent de ces articles récents. Tout d'abord, si les conditions initiales de type périodique nous donnent d'excellents résultats, il serait souhaitable de généraliser cette approche à l'espace tout entier : c'est-à-dire travailler dans l'espace $\mathbb{R}^n$ plutôt que sur le tore $\mathbb{T}^n$.

Pour cela, en prenant comme modèle l'article de Kiselev et Nazarov [KN 09] et compte tenu des propriétés exigées aux fonctions de test, il paraît tout à fait naturel d'utiliser la caractérisation moléculaire des espaces de Hardy locaux $h^p(\mathbb{R}^n)$ pour essayer de généraliser ces résultats sur $\mathbb{R}^n$. La principale difficulté provient du fait que les techniques et les arguments employés sont bien adaptés au tore $\mathbb{T}^n$ et ne se généralisent pas directement à $\mathbb{R}^n$.

Dans [4] je démontre le résultat suivant dans le cas de l'équation quasi-géostrophique critique :

Théorème 7 *Soit $v \in L^\infty([0,T]; BMO(\mathbb{R}^n))$ telle que $div(v) = 0$. Soient $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ une donnée initiale et $\theta(x,t)$ la solution associée de l'équation (10) avec $\alpha = 1/2$ pour $t \in [0,T]$. Alors $\theta(x,t) \in \mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < \gamma < 1/2$.*

L'idée de la démonstration est la suivante : étant donné que le dual de l'espace de Hardy local $h^p(\mathbb{R}^n)$ est précisément l'espace de Hölder $\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^n)$ avec $\gamma = n(1/p-1)$ et $0 < p < 1$, il s'agit alors de vérifier que pour toute molécule $\psi \in h^p(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,t)\psi(x)dx\right| < +\infty.$$

Maintenant, en suivant [KN 09], on dispose de l'égalité de transfert

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,t)\psi(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta_0(x)\psi(x,t)dx\right| \tag{11}$$

où $\psi(x,t)$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t\psi = -\nabla(v\cdot\psi) - \Lambda\psi \\ \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \end{cases} \tag{12}$$

de sorte que l'on peut estimer (11) à partir de l'évolution de la molécule $\psi(x,t)$ et de la donnée initiale θ_0. La partie subtile de la preuve consiste donc à démontrer qu'une molécule $\psi_0 \in h^p$ se "transporte" par l'équation (12) en une autre molécule.

Rappellons qu'une molécule est donnée par les conditions suivantes (cf. [Gold 79],[Ste 93]) :

- petites molécules $(0 < r < 1/2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)||x-x_0|^\omega dx \le r^{\omega-\gamma}, \text{ for } x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(condition de concentration)} \tag{13}$$

$$\|\psi\|_{L^\infty} \le \frac{A}{r^{n+\gamma}} \qquad \text{(condition de taille)} \tag{14}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0 \qquad \text{(condition de moment nul)} \tag{15}$$

- grandes molécules $(1/2 \le r < +\infty)$:

  On exige seulement les conditions (13) et (14).

Etant donné que la condition de moment nul (15) est conservée par la structure de l'équation (12), il suffit de vérifier que les conditions (13) et (14) se conservent dans le temps. La partie la plus difficile du théorème 7 réside donc à prouver que les conditions de concentration et de taille sont préservées par l'évolution de l'E.D.P.

La deuxième voie de recherche prend sa source de façon très surprenante dans une étape intermédiaire de l'étude du transport des molécules du problème précedent. Les solutions mild du problème (12) ont été étudié dans [Mar 08] avec des données initiales dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, mais leur régularité restait mal comprise. Remarquons que pour ce type de solution on dispose de l'estimation

$$\|\psi(\cdot,t)\|_{L^p} + p\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\psi|^{p-2}\psi\Lambda\psi dxds \le \|\psi_0\|_{L^p}$$

qui est le point de départ du résultat suivant.

Théorème 8 *Soit $2 \le p < +\infty$ et soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p-2} f\Lambda f dx < +\infty \quad \textit{alors } f \in \dot{B}^{1/p,p}_p(\mathbb{R}^n).$$

Je donne une démonstration simple dans [4] et nous donnons une preuve plus générale dans [5]. Ce résultat s'étend aisément aux groupes de Lie stratifiés ainsi qu'aux groupes de Lie à croissance polynomiale.

Cette implication est en fait une conséquence de certaines propriétés très intéressantes des semi-groupes de diffusion au sens de Stein [Ste 70]. En effet, pour $0 < \alpha < 1$, il est possible de donner une caractérisation très particulière du semi-groupe défini par $e^{-t\Lambda^{2\alpha}}$ à l'aide de la formule

$$e^{-t\Lambda^{2\alpha}} = \int_0^{+\infty} e^{\sigma t^{1/\alpha}\Delta} d\mu_\alpha(\sigma) \qquad (t \geq 0) \tag{16}$$

où μ_α est une mesure de probabilité définie sur $[0, +\infty[$.

Nous pouvons donc réécrire l'hypothèse du théorème 8 comme

$$\left(\frac{d}{dt}\|e^{-t\Lambda}f\|^p_{L^p}\right)_{|t=0} < +\infty$$

puis utiliser les propriétés de positivité du noyau du semi-groupe $e^{-t\Lambda}$, explicitées par la formule (16), afin d'obtenir l'estimation souhaitée :

$$\|f\|^p_{\dot{B}^{1/p,p}_p} \simeq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+1}}dxdy \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p-2}f\Lambda f dx.$$

Indiquons que la généralité de la formule (16) permet de reformuler le théorème 8 dans le cadre des groupes de Lie stratifiés.

Les recherches menées dans la preuve du théorème 8 nous permettent également de considérer une version non-linéaire des inégalités de Bernstein. Ce type d'inégalité a été étudié initialement pour pour $p \in 2\mathbb{N}$ dans [Dan 97] et pour $p \geq 2$ dans [Pla 00] : si est une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ soit supportée par l'anneau $\{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, alors pour $p \geq 2$, on a

$$C_1\|f\|^p_{L^p} \leq \|\nabla(|f|^{p/2})\|^2_{L^2} \leq C_2\|f\|^p_{L^p}.$$

La généralisation que nous proposons dans [5] s'énonce comme suit.

Théorème 9 *Soit $1 < p < +\infty$ et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ soit supportée par l'anneau $\{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$. Alors, pour $0 < \alpha \leq 1$, on a*

$$C_1\|f\|^p_{L^p} \leq \|\Lambda^\alpha(f|f|^{p/2-1})\|^2_{L^2} \leq C_2\|f\|^p_{L^p}.$$

PERSPECTIVES

(i) De nouveaux champs d'action se dégagent à partir de ces travaux. Tout d'abord il est sans doute possible d'appliquer les méthodes utilisées dans [4] pour étudier le cas sur-critique de l'équation quasi-géostrophique, c'est à dire lorsque $0 < \alpha < 1/2$ dans (10). Dans ce sens j'ai obtenu des résultats partiels (pour des molécules avec une norme L^1 très concentrée ou dont les oscillations sont contrôlées) qui ne permettent pas toutefois d'obtenir le résultat souhaité. Néanmoins je suis actuellement entrain d'explorer plusieurs pistes :
   - Puisque l'espace de Besov $B_1^{-a,1}$ est le dual de l'espace de Hölder $\mathcal{C}^a$ et que l'espace $B_1^{-a,1}$ admet une décomposition atomique régulière, il serait intéressant d'étudier l'évolution de ces atomes en utilisant leur régularité initiale.
   - Une autre piste intéressante consiste à étudier l'évolution des molécules en autorisant une plus grande déformation : si les données initiales sont bien des molécules, le résultat de l'évolution ne sera pas nécessairement une molécule, mais les estimations obtenues sembleraient suffisantes pour obtenir le contrôle recherché.

(ii) Il serait très intéressant d'étudier cette méthode moléculaire dans le cas de la dimension 1 (en espace). En effet, lorsque $n = 1$ l'équation (10) devient

$$\partial_t\theta - (H\theta)\partial_x\theta = -\Lambda^{2\alpha}\theta$$

où $H\theta$ est la transformation de Hilbert donnée par la formule

$$H\theta = \frac{1}{\pi}v.p.\int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(y)}{x-y}dy.$$

Cette équation a été étudié dans [CCF 05] et présente des singularités pour certaines valeurs (très petites) de α. Il serait donc important de traiter les valeurs restantes de α.

(iii) Une autre voie de recherche m'a été proposée par T. Hmidi : il s'agit d'étudier une variation de l'équation (10) en considérant un opérateur de diffusion différent :

$$\begin{cases} \partial_t \theta = \nabla(v \cdot \theta) - \frac{\Lambda^{2\alpha}}{\ln^\beta(1+\Lambda)}\theta \\ \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \end{cases} \tag{17}$$

où l'opérateur $\frac{\Lambda^{2\alpha}}{\ln^\beta(1+\Lambda)}$ est déterminé au niveau de Fourier par la formule

$$\left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{\ln^\beta(1+\Lambda)} f\right)^\wedge(\xi) = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{\ln^\beta(1+|\xi|)}\hat{f}(\xi)$$

L'idée est donc d'étudier les limites de la méthode des molécules en utilisant ce type d'opérateur de diffusion. L'intérêt de considérer une équation du type (17) réside dans le fait que l'on dispose d'un principe du maximum (cf. [Hmidi 10]) qui est à la base de l'approche moléculaire.

(iv) Suite au Colloque "Principes du Maximum, Diffusion Fractionnaire et Inégalités Différentielles et Intégrales pour les EDP déterministes ou stochastiques" réalisé à l'Université d'Evry, j'ai eu l'occasion de discuter avec F. Flandoli et L. Denis sur des problèmes de régularisation stochastique. L'idée de base est de rajouter du bruit stochastique dans l'équation (10) ce qui permettrait d'obtenir un éventuel gain de régularité. Une première étape de ce programme consiste à étudier cette équation avec un bruit additif pour ensuite considérer une partie stochastique dans la nonlinéarité.

(v) Plus généralement, on pourrait également étudier l'évolution des molécules pour obtenir des résultats de régularité pour les solutions d'équations apparentées à l'équation quasi-géostrophique, comme par exemple l'équation d'Euler ou les équations de Navier-Stokes. Il serait aussi très utile d'exploiter les nombreuses conséquences des théorèmes 8 et 9, ainsi que les outils développés dans leurs démonstrations pour l'étude des E.D.P.

ARTICLES SOUMIS

1. Diego Chamorro, *Remarks on a fractional diffusion transport equation with applications to the critical dissipative quasi-geostrophic equation* soumis à Asymptotic Analisis 2010
2. Diego Chamorro & Pierre Gilles Lemarié-Rieusset, *Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes* soumis à Revista Matemática Iberoamericana 2010

COMMUNICATIONS

1. Séminaire du Laboratoire LATP, Université Paul Cézanne, Marseille (Avril 2010).
2. Séminaire du Laboratoire d'Analyse et Probabilité, Université d'Evry Val d'Essonne, Evry (juin 2010).
3. XII Encuentro de Matemáticas y sus Aplicaciones, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador (juillet 2010).
4. IIième école d'été franco-brésilienne "Dynamique des fluides et EDP", Institut Camille Jordan - Université Lyon 1 (juillet 2010).
5. Séminaire du Laboratoire IRMAR, Université de Rennes 1, (novembre 2010).
6. Séminaire du groupe de travail ENS/P6/P7 Institut Henri Poincaré, Paris (janvier 2011).
7. Séminaire du groupe de travail CEREMADE Université Paris-Dauphine, Paris (février 2011).
8. Séminaire du groupe de travail ICMAT, Madrid Espagne, invitation de Diego Córdoba (février 2011).

PARTICIPATION À DES CONFÉRENCES

1. Congrès "Emerging topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations" SIAM, Barcelona, Espagne (juin 2010)
2. Groupe de travail "Maths à Bayonne", Bayonne, France (Janvier 2011)
3. Colloque "Maximum principles, fractional diffusion and differential or integral inequalities for PDEs and SPDEs", Evry, France (Février 2011)

RÉFÉRENCES

[CHN 07] Q. CHEN, Ch. MIAO, Z. ZHANG. *A new Bernstein's inequality and the 2D dissipative quasi-geostrophic equation*, Commun. Math. Phys. 271, 821–838 (2007).

[CCW 01] P. CONSTANTIN, D. CORDOBA, J. WU. *On the critical dissipative quasi-geostrophic equation*. Indiana Univ. Math. J, 50, 97-107 (2001).

[CW 08] P. CONSTANTIN, J. WU. *Regularity of Hölder continuous solutions of the supercritical quasi-geostrophic equation*. Ann. I. H. Poincaré - AN 25, 1103-1110 (2008).

[CCF 05] A. Córdoba, D. Córdoba, M. Fontelos. *Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity*. Annals of Mathematics, 162, 1377-1389 (2005).

[Coif 77] R. COIFMANN & G. WEISS. *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull Amer. Math. Soc., Vol 83, N° 4, (1977).

[Dan 97] R. DANCHIN. *Poches de tourbillon visqueuses*. J. Maths. Pures Appl. 76, 609-647 (1997).

[Dan 02] R. DANCHIN. *Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases*, Comm. Partial Differential Equations 26 (2001) 1183–1233 ; Erratum, Comm. Partial Differential Equations 27 (2002). 2531–2532.

[Fo 75] G. FOLLAND. *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*. Ark. Mat. 13, 161-208 (1975).

[Gold 79] D. GOLDBERG. *A local version of real Hardy spaces*. Duke Mathematical Journal, Vol 46, N°1, (1979).

[Hmidi 10] T. HMIDI. *On a Maximum Principle and its application to logarithmically critical Boussinesq system*, (2010).

[KNV 07] A. KISELEV, F. NAZAROV, G. VOLBERG. *Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation*. Invent. Math. 167, 445-453 (2007)

[KN 09] A. KISELEV, F. NAZAROV. *A variation on a theme of Caffarelli and Vasseur*. Preprint, arXiv :0908.0923.

[Mar 08] F. MARCHAND. *Existence and regularity of weak solutions to the quasi-geostrophic equations in the spaces L^p or $\dot{H}^{-1/2}$*, Commun. Math. Phys. 277, 45-67 (2008).

[Pla 00] F. PLANCHON. *Sur une inégalité de type Poincaré*. C.R. Acad. Sci. 330, 21-23 (2000).

[Re 95] S. RESNICK. *Dynamical problem in nonlinear advective partial differential equations*. Ph.D. thesis University of Chicago. Chicago (1995)

[Sa 79] K. SAKA. *Besov Spaces and Sobolev spaces on a nilpotent Lie group*. Thoku. Math. Journ. Vol. 31, p. 383-437 (1979).

[Ste 70] E. STEIN. *Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory*. Princeton Universty Press (1970).

[Ste 93] E. STEIN. *Harmonic Analysis*. Princeton University Press (1993).

[Var 92] N. Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE & T. COULHON. *Analysis and geometry on groups*. Cambridge Tracts in Mathematics, 100 (1992).

[Wu 01] J. WU. *On Solutions of three Quasi-geostrophic Models*. Preprint, arXiv :math.AP/0012068.

7) Description des activités professionnelles

Cette section résume mes expériences professionnelles dans le monde de la finance de marché. J'ai commencé à travailler dans une société de conseil peu de temps après ma soutenance de thèse. A la fin de ma première mission on m'a proposé d'intégrer une équipe de risque au sein de la Société Générale.

MargO Conseil [2006-2007] Poste occupé : Ingénieur consultant

Contexte

MargO Conseil est une société de conseil (SSII) en ingénieurie financière. Son rôle consiste à fournir des consultants pour les différents projets des entreprises présentes dans la place financière parisienne. J'ai commencé ma première mission avec la Société Générale.

Mission

Chaque produit financier est codé dans un programme informatique développé en interne par la Société Générale. Ce logiciel doit être capable de prendre en compte les données passées et présentes des actifs financiers pour pouvoir calculer un prix qui est modélisé par une équation différentielle stochastique. Il existait plusieurs logiciels permettant d'insérer ces produits financiers dans les systèmes informatiques et un nouvel outil informatique, validé par le département de risque, a été récemment mis à disposition. Par des contraintes légales vis-à-vis des auditeurs externes, il était indispensable de *migrer* tous les anciens produits dans ce nouveau logiciel.

L'objectif de notre équipe était de comprendre tout d'abord les produits financiers pour étudier de façon détaillée l'ancienne modélisation. Ensuite, il s'agissait de recoder -et souvent de remodéliser- l'ensemble de ces produits avec ces nouveaux outils informatiques.

Expérience acquise

Cette première expérience professionnelle m'a permis de mieux comprendre le monde des sociétés de conseils, leurs modes de fonctionnement ainsi que les qualités requises pour être un bon consultant. En effet, même si un diplôme d'ingénieur est fortement recherché par ce type d'entreprise cela n'est pas toujours suffisant : le travail proposé et les conditions particulières du métier de consultant requièrent des compétences de disponibilité, d'écoute, de travail en équipe et d'ouverture.

Je pense que cette expérience vécue sera de grande utilité pour les étudiants d'Ecole d'Ingénieurs qui proposent une filière ou des options dans le monde de la finance.

Société Générale [2007-2009] Poste occupé : Analyste de risque de marché

Contexte

Chaque banque d'investissement possède un département des risques associés aux activités de marché. Ce département à la Société Générale était composé d'une trentaine de personnes avec des missions très variées : en effet un découpage est fait en fonction de la nature des produits utilisés, et pour ma part j'ai intervenu dans les produits dérivés actions.

Mission

J'ai occupé le poste d'« Analyste de risque de marché » pour les produits exotiques. Ma principale mission consistait à vérifier que l'implémentation informatique réalisé par les ingénieurs et par les traders ne présentait pas une sous-estimation du risque liée aux évolutions du marché.

Plus précisément, on modélise un produit financier par une équation différentielle stochastique qui prend en compte plusieurs type de paramètres : les taux d'intérêt, la volatilité, les dividendes, qui peuvent êtres eux mêmes constants dans les cas les plus simples, ou suivre une dynamique (stochastique ou déterministe) dans les cas les plus sophistiqués. Evidemment, une modélisation est plus proche de la réalité si elle prend en compte des paramètres qui évoluent au cours du temps.

Néanmoins, dans l'état actuel des avancées informatiques, il existe des limitations inhérentes aux systèmes qui ne permettent pas de répliquer algorithmiquement toute la complexité de la modélisation mathématique et une approximation est alors indispensable.

Cette approximation est nécessairement inexacte et il existe un risque potentiel important si les conditions de marchés varient trop brusquement ou dans une configuration qui n'est pas prévue initialement. Le métier d'un analyste de risque de marché est donc de s'assurer que la modélisation proposée est la plus *conservative* possible, dans le sens où elle prend en compte un maximum de facteurs, et que l'écart mathématique-informatique résiduel est contrôlé de façon régulière et la plus précise possible par une procédure à mettre en place.

La problématique ne se limite pas uniquement à un soucis de modélisation mathématique, il faut également prendre en compte les problématiques de gestion (coûts de frottement qui souvent n'interviennent pas dans la modélisation théorique) et intégrer ces coûts dans le prix final du produit financier.

STAGES ENCADRÉS

Dans le cadre de mon travail au sein de la Société Générale, j'ai eu l'opportunité de proposer et d'encadrer plusieurs stages de fin d'études.

- *Produits à barrière (2 étudiants en stage de fin d'études d'école d'ingénieur - 2008)* : Certains produits financiers présentent contractuellement des discontinuités dans leur *payoff* (à comparer à une fonction de Heavyside). Pour se couvrir du risque potentiel, la modélisation mathématique exige de calculer la dérivée du payoff ; une masse de Dirac intervient alors dans les quantités d'actifs financiers nécessaires pour équilibrer le risque. Cela ne représente pas de complication théorique majeure mais pose de nombreux problèmes de gestion : tout simplement on ne dispose pas d'un nombre illimité d'actifs financiers. Pour contourner ce problème on procède à un lissage du payoff (un lissage triangulaire par exemple) en introduisant un paramètre de *gap*. Le but du stage était alors de vérifier les valeurs de gap renseignées par les différents traders pour obtenir une méthode conservative unique. Cette méthode a été de grande utilité lors des grandes fluctuations des actifs dûe à la crise financière.
- *« Fees » d'instabilité (1 étudiant en stage de fin de master à Paris VI - 2009)* :

  La plupart des produits exotiques possèdent des *marges techniques* (ou « Fees ») qui servent à prendre en compte certains facteurs qui ne sont pas intégrés par l'algorithme : ainsi si le logiciel donne un prix brut P, le prix final est $P + C$ où C correspond à une correction de la modélisation ou à un coût de gestion.

  Les « Fees » d'instabilité sont donc une correction qui prend en compte l'écart de prix donné par une déformation des nappes de volatilités, elles sont calculées comme suit :

  $$\text{Fee Instab} = \text{Coeff} \times |P(\sigma(S,t)) - P(\sigma_0)| \tag{18}$$

  où Coeff est un coefficient qui dépend du type de produit, $P(\sigma(S,t))$ est le prix du produit calculé avec une volatilité σ qui dépend de deux facteurs : le spot (la valeur) du sous-jacent S et le temps t et où $P(\sigma_0)$ est le prix du même produit calculé avec une volatilité constante σ_0.

  L'objectif de ce stage était double : d'une part élaborer un outil permettant un calcul « réel » du coût d'instabilité, puis dans un deuxième temps, étudier le comportement de ces coûts suivants différents scénarios afin de vérifier la validité du coefficient dans (18).

  A la fin du stage nous avons créé un logiciel très performant qui permet de simuler de façon réaliste le coût engendré par ce type d'instabilité. Ce logiciel, qui a été développé avec l'équipe de risque, la R & D et le trading, est maintenant très utilisé par ces équipes pour modéliser les Fees d'instabilités et pour calibrer très précisément le coefficient d'instabilité.

EXPÉRIENCE ACQUISE

Au-delà des connaissance techniques et mathématiques liées au monde des finances, le fait d'être impliqué dans une équipe nombreuse m'a permis de mieux comprendre la nécessité d'une bonne organisation de travail qui puisse être flexible et efficace. J'ai également compris l'importance de la notion de "produit livré et utilisable" (sous forme de logiciel, de document de validation ou autre) qui est étroitement associée au travail en collaboration avec d'autres équipes. Je pense que cet aspect est caractéristique du métier d'ingénieur et cette expérience a renforcé ma formation initiale à l'Ecole Polytechnique.

En participant activement aux entretiens d'embauche au sein de mon équipe j'ai pu réaliser le décalage qu'il existe parfois entre les attentes des étudiants et leur connaissance du monde de l'entreprise. Je pense que je pourrais participer activement à combler ce décalage en utilisant pour cela mon expérience personnelle. Finalement, les stages que j'ai encadré m'ont donné la possibilité de diriger des étudiants motivés, de tester mes compétences d'organisation et de gestion d'une petite équipe et de former ces étudiants aux différentes facettes du métier d'analyste de risque de marché.

8) DESCRIPTION DES ACTIVITÉS ASSOCIATIVES AMARUN

Cette section résume les activités réalisées dans le cadre de l'association Amarun (http ://www.amarun.org/)

CONTEXTE

AMARUN est une association créée en 2005 dont l'objectif de développer et de promouvoir les sciences exactes en Amérique du Sud et plus particulièrement en Equateur. Je suis membre fondateur, président durant la période 2005-2010, puis trésorier depuis juillet 2011.

Basée à Paris, cette association est présente dans plus de douze pays différents et la plupart des membres sont des docteurs ou des étudiants en thèse, en mathématiques et en physique principalement.

Notre action concerne trois axes principaux : la *divulgation scientifique*, l'*éducation supérieure* et la *recherche et coopération internationale*. Dans le champ de la recherche, nous souhaitons créer et participer aux différents projets de recherche scientifique en Equateur, en développant des programmes de travail, d'échange et de partenariat inter-universitaire. Au niveau de l'éducation, nous souhaitons faciliter l'accès aux bourses et donner des informations sur les études doctorales et post-doctorales à l'étranger. Nous voulons également contribuer à la formation des étudiants avec la rédaction de livres et d'exercices spécialisés que nous mettons à disposition des élèves dans la section *Sciences* de notre page web.

INTERVIEWS (*divulgation scientifique*)

Dans le but de motiver les jeunes étudiants pour faire de la recherche en sciences exactes, nous avons décidé de réaliser des interviews à des personnalités scientifiques de renom international. Ces interviews retracent le parcours d'un chercheur en mathématiques ou en physique afin de mieux présenter les différentes facettes de l'activité de recherche. Ces documents sont mis en ligne et sont affichés dans plusieurs universités équatoriennes. Voici la liste des interviews que j'ai réalisées :

Chercheur	Discipline	Année	Langue
Jean-Pierre Bourguignon (Directeur de l'IHES)	mathématiques	2010	En cours de transcription
Lorenzo Bergomi (Société Générale)	mathématiques financières	2010	Français
Claude Cohen Tannoudji (Prix Nobel de Physique 1997)	physique	2009	Français
Guy David (PdU, Orsay)	mathématiques	2008	Français
Jean-Christophe Yoccoz (Médaille Fields 1994)	mathématiques	2008	Espagnol
Laurent Nottale (CNRS)	physique	2008	Français
Albert Fert (Prix Nobel de Physique 2007)	physique	2007	Espagnol
Roland Séneor (Ecole Polytechnique)	physique	2007	Espagnol
Pierre Cartier (IHES)	mathématiques	2007	Espagnol
Bernard Beauzamy (SCM)	mathématiques appliquées	2007	Espagnol
Yves Meyer (Membre de l'Institut)	mathématiques	2007	Espagnol
Nicole El Karoui (PdU, Paris VI)	mathématiques financières	2006	Espagnol

Toutes ces interviews sont disponibles sur la page web de l'association.

CONFÉRENCES (*divulgation scientifique*)

Nous organisons également des conférences scientifiques ou à caractère scientifique. J'ai participé aux conférences suivantes :

(2006) Conférencier invité à un cours « métis » à l'Université de Louvain-la-Neuve, Belgique.
Thème traité : la fuite des cerveaux dans les pays en développement.

(2009) Conférence à l'Escuela Politécnica del Ejército, Quito - Equateur.
Thème traité : Importance des mathématiques dans les banques d'investissement.

(2010) Conférence de motivation scientifique au Lycée franco-équatorien La Condamine.
Thème traité : L'importance des sciences.

ACTIVITÉS PÉDAGOGIQUES (*éducation supérieure*)

J'organise régulièrement des cours d'été en collaboration avec l'Escuela Politécnica Nacional. Le dernier en date a été réalisé en juillet 2009 et a porté sur la Théorie de la mesure et de l'intégration. J'ai organisé mon cours autour de 8 leçons suivies de 8 feuilles de TD. J'ai également rédigé un polycopié (en espagnol) de 250 pages téléchargeable à l'adresse suivante :

http ://www.amarun.org/ ≫ Ciencias ≫ Matematicas ≫ Curso EPN 2009 : recursos ≫ Folleto

Il s'agit d'une version intermédiaire avec uniquement les quatres premiers chapitres. Ce document a suscité l'intérêt des professeurs de l'Escuela Politécnica Nacional et sera publié en deux volumes. Le premier tome, qui a déjà été publié par l'Escuela Politécnica Nacional en 2010, contient donc les quatres premiers chapitres. Cette version est consultable ici :

http ://www.amarun.org/ ≫ Biblioteca Virtual ≫ Matemáticas ≫ Nivel 2 ≫ Teoría de la Medida e Integración ≫ Folletos EspaciosLp_Vol1.pdf

Le deuxième volume comportera les chapitres restants (chapitres 5 à 10), dont voici la liste des chapitres :

Chapitre	Titre
1	Espaces métriques, espaces normés, espaces de Banach
2	Théorie de la mesure
3	Théorie de l'intégration
4	Espaces de Lebesgue
5	Introduction à l'analyse fonctionnelle
6	Mesures complexes et différentiabilité
7	Convolution
8	Espaces de Lorentz
9	Espaces de Hilbert
10	Applications

En plus des cours d'été, nous mettons à disposition des listes d'exercices, le plus souvent complétées avec des résumés, afin de créer une bibliothèque virtuelle. Voici la liste du matériel que j'ai rédigé :

Matière	Sujet	type de matériel	niveau
Arithmétique	Division Euclidienne	résumé	Licence 1ère année
Algèbre	Applications linéaires	exercice	Licence 1ère année
Analyse	Normes et distances Limites et D.L. Nombres Complexes Normes et distances	exercice 1 exercice 2 exercice résumé	Licence 1ère année Licence 1ère année Licence 1ère année Licence 1ère année
Théorie des distributions	Généralités	exercice	Licence 3ème année
Théorie de la mesure	Mesures et Espaces de Lebesgue	8 leçons, 8 feuilles de TD, 2 DM	Licence 3ème année
Analyse Harmonique	Espaces de Lorentz, Fonctions maximales et Interpolation	leçon	M2

D'autres polycopiés sont prévus ou en cours de rédaction, notamment :

1. *Une introduction à* SCILAB, en collaboration avec Sebastián Araujo, enseignant à l'Universidad Politécnica Javeriana, Quito, Equateur.

   Je vais traiter des aspects d'intégration numérique en présentant les différentes méthodes de quadrature (méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson, de Simpson 3/8) ainsi qu'une étude de l'erreur réalisé. Une partie sera également consacrée à l'approximation d'intégrales par la méthode de MonteCarlo (modélisation de marches aléatoires, du mouvement brownien puis méthodes de MonteCarlo).
   Sebastián Araujo traitera des aspects de résolution et d'application d'E.D.P.

2. Une introduction au calcul stochastique (en projet).

OUVERTURE À L'INTERNATIONAL (*recherche et coopération internationale*)

Quand j'ai découvert la volonté de l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise (ENSIIE) pour rechercher des contacts à l'international, je me suis spontanément investi pour la signature d'un accord de coopération entre l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise et l'Escuela Politécnica Nacional.

J'ai donc organisé le déplacement du directeur de l'ENSIIE à Quito et je l'ai accompagné personnellement pour la rencontre avec le doyen de l'Escuela Politécnica Nacional. Lors de ce déplacement, une série de présentation de l'ENSIIE a été réalisée aux différentes facultés de l'Escuela Politécnica Nacional.

Cet accord a été signé en juillet 2010 par les directeurs des deux établissements et comporte de nombreuses possibilités de travail. Grâce à cet accord, un étudiant de l'EPN est actuellement en France pour faire un échange d'un semestre en l'ENSIIE.

J'espère par la suite intensifier cet accord par le biais de stages de fin d'études et par la possibilité d'encadrer des thèses avec des chercheurs de ces deux institutions.

Les différents contacts tissés au sein de l'association AMARUN -présente dans plus de 12 pays différents- me permettrons de développer encore plus cette ouverture internationale, en cherchant des rapprochement avec d'autres pays en général et en Amérique du Sud plus particulièrement.