Lección n°02: Traza, potencia y equivalencia de matrices 26 de diciembre de 2018

1. Preliminares

Definición 1 (Binomio de Newton) *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$, tenemos*

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$$

donde

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

y se define el factorial de $k \in \mathbb{N}$, representado por $k!$, como aquel que cumple las siguientes propiedades:

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $k! = (k-1)!k$

Ejemplo.
Sea $x \in \mathbb{R}$. Mediante el Binomio de Newton se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x+3)^5 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{5}{k} x^k 3^{5-k} \\
&= \binom{5}{0} x^0 3^5 + \binom{5}{1} x^1 3^4 + \binom{5}{2} x^2 3^3 + \binom{5}{3} x^3 3^2 \binom{5}{4} x^4 3^1 + \binom{5}{5} x^5 3^0 \\
&= \frac{5!}{0!5!} 3^5 + \frac{5!}{1!4!} x 3^4 + \frac{5!}{2!3!} x^2 3^3 + \frac{5!}{3!2!} x^3 3^2 \frac{5!}{4!1!} x^4 3 + \frac{5!}{5!0!} x^5 \\
&= 3^5 + 5x3^4 + 5(2)x^2 3^3 + 5(2)x^3 3^2 + 5x^4 3 + x^5 \\
&= 243 + 405x + 270x^2 + 90x^3 + 15x^4 + x^5
\end{aligned}$$

2. Potencias de una matriz

Definición 2 (Producto de matricez) *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Definimos como:*

$$A^1 = A$$

y como $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A^k = A^{k-1} A$$

Notaremos mediante A^k, a la k-ésima potencia de A.

En esta sección discutiremos algunas técnicas para calcular la k-ésima potencia para una cierta matriz dada. En la siguiente lista se muestran algunas técnicas para calcularla. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculo directo para potencias bajas

   Si se pide calcular la potencia dos o tres de una matriz cuadrada de orden dos o tres, el método a emplear será calcular directamente el producto de las matrices. Si queremos calcular potencias superiores utilizaremos otro método.

   Ejemplo. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   si buscamos calcular A^3, calculamos primero
$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
   luego,
$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Descomposición utilizando el método de Newton

   Si podemos describir la matriz A como:
$$A = \alpha I_n + \beta G$$
   donde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y una matriz $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cuyas potencias son fáciles de calcular, en ese caso calcularemos las potencias de A utilizando el Binomio de Newton,
$$\begin{aligned} A^p &= (\alpha I_n + \beta G)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\alpha I_n)^{p-k} (\beta G)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \beta^k G^k \end{aligned}$$

   A continuación presentamos una lista de matrices G cuyas potencias son fáciles de calcular.

   a) Matriz de Jordan
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$
$$G^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad G^n = 0$$

b) Matriz de permutación circular

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G^n = I_n$$

c) Matriz de unos

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad G^2 = nG$$

Ejemplo.

Indique una formula general para las potencias de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos describir A como la suma de las siguientes matrices

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -I_3 + G$$

utilizando el Binomio de Newton considerando $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \beta^k G^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} 1^k 3^{k-1} G \\ &= (-1)^p I_3 + G \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} 3^{k-1} \end{aligned}$$

3. Usar la recurrencia

   Si al realizar las primeras potencias nos damos cuenta de la tendencia al multiplicar matrices, utilizaremos esta ultima para determinar una formula general de la potencia de la matriz.

   Ejemplo. Si

   a) $A^2 = A$ entonces se deduce que $A^k = A$.

   b) $A^2 = \alpha A$ entonces se deduce que $A^k = \alpha^{k-1} A$

   c) $A^3 = 0$ entonces se deduce que $A^k = 0$

3. Traza de una matriz

Definición 3 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La traza de A, notada por $tr(A)$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de A, es decir,*

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \cdots +, B a_{nn}$$

Teorema 1 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\beta \in \mathbb{K}$. Se verifica que:*

1) $tr(\beta A) = \beta tr(A)$;

2) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$;

3) $tr(A^{\intercal}) = tr(A)$; y

4) $tr(AB) = tr(BA)$.

Demostración.

1) $tr(\beta A) = \beta tr(A)$;

Por definición de producto por un escalar se tiene que

$$\begin{aligned} tr(\beta A) &= tr((\beta a_{ij})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \beta a_{kk} \\ &= \beta \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \\ &= \beta tr(A) \end{aligned}$$

2) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$;

Por definición de suma de matrices se tiene que:

$$\begin{aligned} tr(A + B) &= tr((a_{ij} + b_{ij})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + b_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} \\ &= tr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

3) $tr(A^{\intercal}) = tr(A)$;

Por definición de transpuesta de una matriz se tiene que

$$\begin{aligned} tr(A^{\intercal}) &= tr((a_{ji})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \\ &= tr(A) \end{aligned}$$

4) $tr(AB) = tr(BA)$.

Por definición de producto de matrices se tiene que

$$\begin{aligned} tr(AB) &= tr\left(\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kk}b_{kk} \\ &= tr\left(\left(\sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{lj}\right)\right) \\ &= tr(BA) \end{aligned}$$

■

Ejemplo. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$tr(A) = 3 + 4 + 8 = 15$$

4. Inversa de una matriz

En esta sección definiremos a las matrices inversas y veremos dos de sus equivalencias, es importante destacar que a lo largo de secciones futuras continuaremos viendo más de dichas equivalencias al ser este un concepto transversal del álgebra lineal.

En esta sección se estudia el análogo matricial, del inverso multiplicativo, de un número diferente de cero. Por ejemplo:

$$5^{-1}5 = 1 \qquad 55^{-1} = 1$$

lo cual en el caso de las matrices solo se cumple si la matriz es cuadrada y se cumplen ambas ecuaciones, tomando en cuenta que el producto matricial no es conmutativo.

Definición 4 (Matriz invertible) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1) Se dice que $C_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la inversa por izquierda de A si

$$C_1A = I_n$$

2) Se dice que $C_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la inversa por derecha de A si

$$AC_2 = I_n$$

3) Se dice que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la inversa A si

$$CA = AC = I_n \tag{1}$$

Si existe una matriz C que verifica (1), se dice que A es invertible, y notaremos a $C = A^{-1}$.

En general, no todas las matrices poseen inversa, solo aquellas matrices cuadradas para las cuales existe una matriz B que verifica la ecuación (1). Al ser una característica tan relevante, se divide a las matrices cuadradas en dos grupos:

1) las matrices singulares, aquellas que no poseen inversa, es decir, matrices no invertibles; y

2) las matrices no singulares o invertibles.

Ejemplo. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y, se tiene que:

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego, $C = A^{-1}$ y A es invertible.
Ejemplo.

Teorema 2 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrices invertibles.*

1) A^{-1} *es única.*

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4) $(A^{\intercal})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\intercal}$

Demostración.

1) A^{-1} es única.

Supongamos que existen dos matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que son la inversa de A, entonces verifican que:

$$AB = BA = I_n \qquad AC = CA = I_n$$

entonces utilizando la ecuación anterior se tiene que

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

de donde $B = C$, por lo cual la inversa es única.

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

En este caso buscamos demostrar que:

$$A^{-1}A = I_n \qquad \text{y} \qquad AA^{-1} = I_n$$

lo cual se tiene por definición de inversa de A.

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Multiplicamos la matriz $B^{-1}A^{-1}$ por la izquierda y por la derecha de AB para determinar si cumple (1). Se tiene que:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_nB) = B^{-1}B = I_n$$

de manera análoga se tiene que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

demostrando el enunciado.

4) $(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$ Multiplicamos la matriz $\left(A^{-1}\right)^\intercal$ por la izquierda y por la derecha de $A^\intercal$ para determinar si cumple (1). Se tiene que:

$$\left(A^{-1}\right)^\intercal (A^\intercal) = \left(AA^{-1}\right)^\intercal = (I_n)^\intercal = I_n$$

de manera análoga se tiene que:

$$(A^\intercal)\left(A^{-1}\right)^\intercal = \left(A^{-1}A\right)^\intercal = (I_n)^\intercal = I_n$$

■

5. Operaciones elementales de fila

Definición 5 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $r, s \in I$. Existen tres operaciones elementales de fila, las cuales son:*

1) Multiplicación de un escalar $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, por una fila de A.

$$\beta A_r = \begin{pmatrix} \beta a_{r1} & \beta a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{r1} & \beta a_{r2} & \cdots & \beta a_{rj} & \cdots & \beta a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \beta F_r \to F_r$$

2) Intercambio de la fila r por la fila s de una matriz A.

$$F_r \leftrightarrow F_s$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad F_r \leftrightarrow F_s$$

3) Reemplazo de la r-ésima fila de A por la r-ésima fila de A más β veces la s-ésima fila de A.

$$F_r + \beta F_s \to F_r$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+\beta a_{s1} & a_{r2}+\beta a_{s2} & \cdots & a_{rj}+\beta a_{sj} & \cdots & a_{rn}+\beta a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

realicemos diferentes operaciones de fila a la matriz A

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} && F_1 \leftrightarrow F_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & 12 & 15 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} && 3F_2 \to F_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 12 & 15 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} && -F_3 + F_1 \to F_1 \end{aligned}$$

5.1. Matrices elementales

Vamos a utilizar la definición de operaciones de fila para definir las matrices elementales.

Definición 6 (Matriz elemental) *Sea $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que E es una matriz elemetal si se obtiene de realizar un operación de fila a la matriz identidad I_n.*

Ejemplos.

1. E_1 que se obtiene de realizar la operación $F_2 \leftrightarrow F_3$ a I_3

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. E_2 que se obtiene de realizar la operación $5F_2 \to F_2$ a I_3

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. E_3 que se obtiene de realizar la operación $3F_2 + F_1 \to F_1$ a I_4

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. E_4 que se obtiene de realizar la operación $15F_1 + F_2 \to F_2$ a I_2

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Las operaciones de fila son reversible, es decir, es posible regresar a la matriz original realizando otra operación elemental de fila, lo cual se resume en la siguiente tabla:

Operación elemental	Operación elemental inversa
$F_i \leftrightarrow F_j$	$F_j \leftrightarrow F_i$
$\beta F_j \to F_j$	$\frac{1}{\beta} F_j \to F_j$
$\beta F_i + F_j \to F_j$	$-\beta F_i + F_j \to F_j$

Proposición 1 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $E \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ corresponde a la operación de fila O_p entonces el aplicar la operación O_p a la matriz A se obtiene la matriz A_1, entonces*

$$EA = A_1$$

Es decir, el resultado de aplicar a la matriz A la operación O_p equivale a multiplicar la EA.

1. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

le aplicamos la operación de fila $-2F_2 + F_3 \to F_3$, obtenemos la matriz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

la matriz elemental asociada a la operación de fila $-2F_2 + F_3 \to F_3$, obtenemos la matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_1$$

2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

le aplicamos la operación de fila $3F_1 \to F_1$, obtenemos la matriz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz elemental asociada a la operación de fila $3F_1 \to F_1$, obtenemos la matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$EA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = A_1$$

3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

le aplicamos la operación de fila $F_1 \leftrightarrow F_3$, obtenemos la matriz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

la matriz elemental asociada a la operación de fila $F_1 \leftrightarrow F_3$, obtenemos la matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = A_1$$

Proposición 2 *Toma matriz elemental $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible.*

Prueba. Sea $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ asociada a la operación de fila O_p tal que

$$EI_n = E$$

la operación inversa de O_p es O_q, cuya matriz elemental asociada es E_2, tal que:

$$E_2E = I_n \qquad \text{y} \qquad EE_2 = I_n$$

de donde E es inversible y E_2 es su inversa. ■

5.2. Equivalencia de matrices

Notamos que al aplicar una operación de fila a una matriz A el resultado es una matriz diferente B, que es equivalente a la matriz A. Vamos a formalizar este concepto a continuación.

Definición 7 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A es equivalente a B, notado por A B, si y sólo si existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que*

$$B = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1A$$

Ejemplo. Consideremos la matriz

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} && F_1 \leftrightarrow F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} && 3F_1 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \frac{1}{11}F_3 \to F_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && F_2 - F_3 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && -2F_3 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \frac{1}{2}F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && F_2 + F_1 \to F_1
\end{aligned}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $A \sim B$ puesto que

$$B = E_7\, E_6\, E_5\, E_4\, E_3\, E_2\, E_1\, A$$

donde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$