

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción al análisis funcional</b>	<b>1</b>
1.1. Aplicaciones lineales continuas . . . . .	2
1.1.1. Definiciones y primeras propiedades . . . . .	2
1.1.2. Continuidad de las aplicaciones lineales . . . . .	6
1.1.3. Aplicaciones multilineales . . . . .	18
1.2. Teoremas de Hahn-Banach . . . . .	22
1.2.1. Forma analítica . . . . .	22
1.2.2. Aplicación a las aplicaciones lineales continuas . . . . .	25
1.2.3. Forma geométrica . . . . .	28
1.2.4. Aplicación a la separación de conjuntos y a la densidad . . . . .	32
1.3. Teoremas clásicos del análisis funcional . . . . .	37
1.3.1. Teorema de la aplicación abierta . . . . .	40
1.3.2. Teorema del grafo cerrado . . . . .	43
1.3.3. Teorema de Banach-Steinhaus . . . . .	44
1.4. Topologías fuertes y débiles . . . . .	50
1.4.1. Motivación y construcción de topologías débiles . . . . .	51
1.4.2. Dualidad y topologías asociadas . . . . .	57
1.4.3. Dualidad y reflexibilidad en los espacios de Banach . . . . .	74
1.4.4. Envolturas convexas y puntos extremales . . . . .	93
1.5. Realización de los espacios duales y espacios de sucesiones . . . . .	101
1.5.1. Realización de los espacios duales . . . . .	102
1.5.2. Definiciones y propiedades de los espacios de sucesiones . . . . .	104
1.5.3. Resultados generales y algunos ejemplos . . . . .	105
1.6. Ejercicios . . . . .	122
<b>2. Complementos de teoría de la medida</b>	<b>129</b>
2.1. Medidas con signo y medidas complejas . . . . .	130
2.1.1. Definiciones y primeras propiedades . . . . .	131
2.1.2. Teoremas de descomposición de medidas . . . . .	139
2.1.3. Variación total de medidas . . . . .	143
2.1.4. Integración con una medida con signo o compleja . . . . .	150
2.2. Continuidad absoluta . . . . .	153
2.2.1. Teorema de Radon-Nikodym . . . . .	157
2.2.2. Esperanza Condicional . . . . .	166
2.2.3. Singularidad y Teorema de descomposición de Lebesgue . . . . .	169
2.3. Aplicaciones diferenciables . . . . .	172
2.3.1. Imagen de medidas y cambio de variables . . . . .	172
2.3.2. Diferenciación de medidas . . . . .	187
2.3.3. Funciones de variación acotada . . . . .	203
2.3.4. Diferenciación de funciones . . . . .	211

2.4.	Medidas en espacios localmente compactos . . . . .	216
2.4.1.	Introducción . . . . .	216
2.4.2.	Teorema de Representación de Riesz . . . . .	218
2.4.3.	Medidas de Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ . . . . .	223
2.5.	Ejercicios . . . . .	225
<b>3.</b>	<b>Dualidad y espacios de Lebesgue</b>	<b>231</b>
3.1.	Espacios $L^p$ ( $1 < p < +\infty$ ) . . . . .	232
3.1.1.	El resultado de dualidad . . . . .	233
3.1.2.	Reflexividad . . . . .	244
3.1.3.	Propiedades . . . . .	250
3.2.	Espacio $L^1$ . . . . .	254
3.2.1.	El resultado de dualidad . . . . .	255
3.2.2.	Reflexividad . . . . .	262
3.2.3.	Propiedades . . . . .	264
3.3.	Espacio $L^\infty$ . . . . .	265
3.3.1.	El resultado de dualidad . . . . .	265
3.3.2.	Reflexividad . . . . .	271
3.3.3.	Propiedades . . . . .	271
3.4.	Dualidad en otros Espacios . . . . .	273
3.4.1.	El espacio $C_0$ y el espacio de Medidas de Radon . . . . .	273
3.4.2.	Los espacios $L^p_{loc}$ y $L^p_c$ . . . . .	281
3.5.	Ejercicios . . . . .	287
<b>4.</b>	<b>Convolución</b>	<b>295</b>
4.1.	Una estructura adicional . . . . .	296
4.1.1.	Grupos topológicos localmente compactos . . . . .	296
4.1.2.	Medidas de Haar, primeras propiedades . . . . .	304
4.1.3.	Espacios de Lebesgue y medidas de Haar . . . . .	316
4.2.	Producto de convolución . . . . .	318
4.2.1.	Definición y propiedades elementales . . . . .	319
4.2.2.	Desigualdades de Young . . . . .	326
4.3.	Soporte de convolución y regularidad . . . . .	329
4.3.1.	Soporte del producto de convolución . . . . .	330
4.3.2.	Derivadas parciales: notaciones . . . . .	333
4.3.3.	Derivación y producto de convolución . . . . .	336
4.4.	Aplicaciones de la convolución . . . . .	339
4.4.1.	Sucesiones regularizantes, aproximación y densidad . . . . .	340
4.4.2.	Un criterio de compacidad . . . . .	346
4.4.3.	Aproximaciones de la identidad . . . . .	349
4.5.	Operadores de convolución . . . . .	353
4.5.1.	Definiciones y propiedades elementales . . . . .	354
4.5.2.	Continuidad de los operadores de convolución . . . . .	355
4.5.3.	Semi-grupos de convolución . . . . .	357
4.6.	Ejercicios . . . . .	364
	<b>Bibliografía</b>	<b>369</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>373</b>